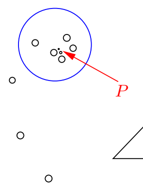
Kompendium der Höheren Mathematik für Physiker

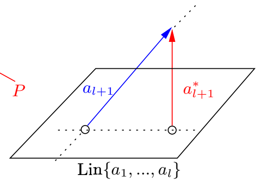
Daniel Schmidt

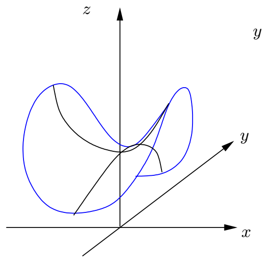
Berlin, den 24. März 2004

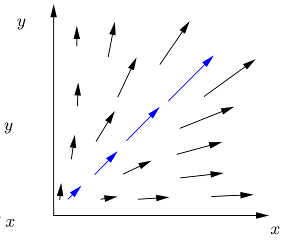
Zusammenfassung

Mit HMΦ ist dem Physikstudentn ein kompaktes Skript zur Begleitung des Vordiploms in höhere Mathematik gegeben. Es beinhaltet alle grundlegenden Themen der Mathematik, die an der Technischen Universität Berlin im Studiengang Physik mindestens verlangt werden sollten. Es wird dem Überblick zu Definitionen, Sätzen, vereinzelten Beweiseansätzen und Beispielen mehr Beachtung geschenkt, als es der Exaktheit eines Mathematikers Recht wäre. Bei gesteigerten Interesse eines Themas sind die an fast jeder Stelle aufgeführten Literaturverweise sicherlich hilfreich. Für grundlegende Ansprüche eines Physikstudenten ist das Skript jedoch vollkommen ausreichend.









Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Vollständige Induktion **S** [3, 1.53] $\exists c \in \mathbb{N}, \quad A(n)$ ist Aussageform mit Belegung von Elementen von $\mathbb{N}$

$$\Big(A(c) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \quad A(n) \Longrightarrow A(n+1)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} A(n) \tag{1.1}$$

Bernoullische Ungleichung **S** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{1.2}$$

Binominalkoeffizient **D** $k, n \in \mathbb{N}_0, \quad k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.3}$$

Binomischer Satz **S** $a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.4}$$

Abbildungseigenschaften **D** [4, 10] Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- injektiv, wenn keine zwei Elemente von X auf dasselbe Elemente von Y abgebildet werden
- surjektiv, wenn jedes Element $y \in Y$ ein $f(x)$ ist
- bijektiv, wenn sie ist sur- und injektiv ist.

Gruppe **D** [4, 189] ist Paar $(G, \cdot)$, bestehend aus Menge G und Abbildung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$, wobei

- Assotivität $\forall a, b, c \in G : \quad (ab)c = a(bc)$
- Neutrales Element $\exists e \in G, \quad \forall a \in G : \quad ae = ea = a$
- Inverses Element $\forall a \in G, \quad \exists a^{-1} \in G : \quad aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Körper **D** [4, 64] ist Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ aus Menge $\mathbb{K}$ und zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \cdot &: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

mit folgenden Axiomen:

- $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$ (Addition)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \lambda + \mu = \mu + \lambda$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists 0 \in \mathbb{K} : \quad \lambda + 0 = \lambda$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists -\lambda \in \mathbb{K} : \quad \lambda + (-\lambda) = 0$
- $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$ (Multiplikation)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \lambda\mu = \mu\lambda$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists E \in \mathbb{K}, E \neq 0 : \quad E\lambda = \lambda$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K} : \quad \lambda^{-1}\lambda = 1$
- $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : \quad \lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$ (Distributiv)

2 Analysis

2.1 Konvergenz und Folgen

Folge **D** [3, 1.99] Abbildung $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_n &= a(n) \\ \{a_n\} &= a \end{aligned}$$

Teilfolge **D** [3, 1.106] $\{a_n\}$ Folge, $\{n_k\}$ Auswahlfolge aus $\mathbb{N}$

$$k \mapsto a_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

Dann ist $\{a_{n_k}\}$ Teilfolge von $\{a_n\}$

Konvergenz von Folgen **D** [3, 1.100] Folge $\{a_n\}$ ist konvergent gegen b wenn für $n \to \infty$

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon \quad \exists p \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \quad |a_n - b| < \varepsilon \\ \lim_{n \to \infty} a_n = b \end{gathered}$$

Cauchy-Folge **D** [1, 2.104] Folge $\{u_n\}$ in normierten Vektorraum, wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall i, j > k$

$$\| u_i - u_j \| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Bolzano-Weierstraß **S** [3, 1.109] Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt

Limes Superior und Limes Inferior **D** $\overline{\lim}$ ist gröster Häufungspunkt der Folge
$\underline{\lim}$ ist kleinster Häufungspunkt der Folge

2.2 Reihen

Zahlenreihe **D** $\forall \in \mathbb{N} \quad (a)_i$ ist Folge, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$

Cauchy-Konvergenz für Reihen **D** [1, 1.285] Reihe a_i konvergent $\Leftrightarrow$:
$\forall \varepsilon > 0, \exists l > 0$, daß $\forall m, n \leq l : \quad :$

$$\left| \sum_{i=n}^{m} a_i \right| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Harmonische Reihe **D** $\forall i \in \mathbb{N} \quad a_i := \frac{1}{i}, a_0 := 0$
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ ist divergent

Geometrische Reihe **D** $\forall i \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} : \quad a_i := q^i$

- $|q| < 1$ konvergent: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$
- $|q| \geq 1$ divergent

Konvergenzkriterium **S** [1, 1.287] Es gilt $\forall i \in N$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen:

- **Majoranten** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergente Folge, $|a_i| \leq b_i, \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent
- **Quotienten** $\exists q \in [0, 1] : \quad \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq q < 1 \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent
- **Wurzel** $\exists q \in [0, 1] : \quad \sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1 \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent

Absolute Konvergenz **S** [1, 1.63] Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Minoranten-Kriterium **S** [1, 1.288] $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ divergente Reihe, $\forall i \in \mathbb{N} \quad a_i \geq b_i \geq 0$ bist auf endlich vieles Ausnahmen. Dann $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergent.

Alternierende Reihe **D** [1, 1.289] $\forall i \in \mathbb{N}: \quad a_i a_{i+1} < 0$

Leipnitz-Kriterium **S** [3, 135] $c \in \mathbb{Z}, \{a_n\}$ reelle Folge, die monoton falled ist, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Dann ist alternierende Reihe $\sum_{k=c}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Nullfolge und alterniernde Folge **S** $\forall i \in \mathbb{N}: \quad a_i$ monoton fallende Nullfolge, $\Rightarrow (a)_i$ konvergent

Potenzreihe **D** [1, 1.290] a_i reelle Folge, $P(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

Komplexe Potenzreihe $z_0 \in \mathbb{C}, a_i$ komplexe Folge. Potenzreihe mit Mittelpunkt z_0 ist $P(z) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i$

Trigonometrische Funktionen **D**

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n x^{2n}}{(2n)!} \\
e^{\mathrm{i}x} &= \cos x + \mathrm{i} \sin x \\
1 &= \sin^x + \cos^x \\
\sin x &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x} \right) \\
\cos x &= \frac{1}{2} \left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} \right)
\end{aligned}$$

Konvergenzradius **D** [1, 1.292] $P(x)$ Potenzreihe, $R(x) = \sup\{|r| \in \mathbb{R} \big| P(r) \text{konvergent}\}, \quad R(x) \in \mathbb{R}^+$

Konvergenzradius berechnen **S** [1, 1.292] Potenzreihe $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, dann $R(x) = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
$R(x) = \infty$, falls $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$,
$R(x) = 0$, falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt

2.3 Topologie des R

offene Menge **D** [1, 1.111] $O \subset E^n$ heißt offen, wenn $\forall p \in O, \quad \exists \varepsilon > 0: \quad U_\varepsilon(p) \subset O$

abgeschlossene Menge **D** [1, 1.113] $A \subset E^n$ ist abgeschlossen, wenn Komplement $E^n \backslash A$ offen ist, oder
jeder Häufungspunkt von A ist Element von A oder
jeder Häufungspunkt von A ist Element von A

kompakt **D** abgeschlossen und beschränkt

zulässig **D** ∂G setzt sich aus endlich vielen orientierten regulären Hyperflächenstücken zusammen, deren Normalenfelder ins Äußere von G weisen.

Abschluß der Mengen **D** [3, 1.87] $\overline{A} := A \cup \{x \mid x \text{ Häufungspunkt von } A\}$

Offener Kern **D** [3, 1.87] $A^\circ = \{x \mid x$ innerer Punkt von A

Umgebung **D** [3, 1.67]

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(a) &:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \varepsilon-\text{Umgebung von } a \\
U_\varepsilon^\circ(a) &:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \backslash \{a\}
\end{aligned}$$

Rand **D** [1, 1.114] Der Rand ∂M einer Menge $M \in E^n, \quad \forall U(p)$

$$\begin{aligned}
\partial M := \{p \in E^n | U \cap M &\neq \emptyset \\
U \cap E^n \backslash M &\neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

Häufungspunkt **D** [1, 2.126] Punkt $u \in V$ einer Menge $M \subset V$, daß $\forall \varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(u) \cap (M \backslash u) \neq \emptyset \tag{2.4}$$

Häufungspunkt einer Folge **D** $\forall \varepsilon \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, mit $k > k_0$
h ist HP der Folge $\{a_k\}$

$$|a_k - h| < \varepsilon \tag{2.5}$$

In jeder ε-Umgebung von von h liegen unendlich viele der a_n

Berührpunkt **D** [1, 2.126] Punkt $u \in V$ einer Menge $M \subset V$, daß $\forall \varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(u) \cap M \neq \emptyset \tag{2.6}$$

isolierter Punkt **D** [1, 2.126] Berührpunkte, die keine Häufungspunkte sind

Dichte Untermenge **D** $(X, \| \cdot \|)$ normierter Raum, $M \subset X$
$M \subset^D X \Longleftrightarrow$
$\forall i \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in M$ mit

$$\| x - y \| < \varepsilon \tag{2.7}$$

topologischer Raum **D** [7, 1] (X, O) ist ein Paar aus Menge X und System O von Teilmengen aus X

- $X, \emptyset \in O$
- beliebige Vereinigungen von Elementen aus O sind in O enthalten
- $O_1, O_2 \in O \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in O$

Mannigfaltigkeit **D** [7, 4] mit der Dimension n ist tologischer Raum, der lokal homöomorpg zu $\mathbb{R}^n$ ist. Es gilt $U \subset^o M, V \subset^o \mathbb{R}^n$. Dabei heißt der Homöomorphismuas $h: U \longrightarrow V$ Kartenabbildung (Karte), und (h, U) Karte mit Kartengebiet U.

2.4 Stetigkeit

Stetigkeit **D** [1, 1.115] $f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in x stetig wenn $\forall \varepsilon \quad \exists \delta, \forall y$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2.8}$$

Gleichmäßige Stetigkeit **D** [1, 1.174] $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D$ folgendes gilt:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - (fy)| < \varepsilon \tag{2.9}$$

Beschränktheit **D** [1, 1.121] $A \subset E^n$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow \exists p \in E^n \quad \exists r \in \mathbb{R}$ mit
$A \subset K(p) \Rightarrow$

$$\forall q \in E^n \quad \exists c(p) \in \mathbb{R} \text{ mit } A \subset K_{c(p)}(p) \tag{2.10}$$

lipschitzstetig **D** Funktion f in a lipschitzstetig, $\exists c > 0, \quad \forall x \in D$

$$|f(x) - f(a)| \leq c|x-a| \tag{2.11}$$

Kompaktheit **D** [1, 1.121] $A \in E^n$ heißt kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschlossen und beschränkt.

Heine-Borel **S** [1, 1.121] $A \subset E^n$ heißt kompakt $\Leftrightarrow$
jedes System $\{O_i | i \in Ind\}$ von offenen Teilmengen des E^n,
das A überdeckt, ein endliches Teilsystem $\{O_{i,1}, \ldots, O_{i,k}\}$ besitzt, das auch A überdeckt.

Satz vom Maximum **S** [1, 1.122] $f : E^n \longrightarrow E^m \subset C$ und $A \subset^c E^m$ (Bildmenge ist ebenfalls kompakt)
$\exists p_{min}, p_{max} \in A \forall p \in A :$ mit $f(p_{max}) \geq f(p) \geq f(p_{min})$ p_{min} heißt Minimum, p_{max} heißt Maximum

Beweis $f(A)$ kompakt also auch beschränkt und es gibt Supremum und Infimum.
Es gibt Folge $s_i \in f(a), i \in \mathbb{N}$ mit
$s = \lim_{i \to \infty} s_i, s \in f(A)$. Dann $\exists p_{max} :\in s = f(p_{max})$

Zusammenhängende Mengen **D** [1, 1.124] $C \subset E^n$ heißt zusammenhängend, wenn sie nicht durch zwei offene Mengen in nicht leere disjunkte Teile zerlegt werden kann.
D.h. $A, B \subset^c$: $A \cap C \neq \emptyset, B \cap C\emptyset, C \subset A \cup C \Rightarrow A \cap B \cap C \neq \emptyset$

wegzusammenhängend **D** [3, 2.587] $n \in \mathbb{N}, \quad G \subset \mathbb{R}^n$
$\forall x, y \quad \exists w \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$ mit

$$w(0) = x, w(1) = y \tag{2.12}$$

Gebiet **D** [3, 1.87] A Gebiet in $B \to A$ offene Teilmenge in B und A zusammenhängend, also

$$A \subset^G B \tag{2.13}$$

Zwischenwertsatz **S** [1, 1.125] $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $C \subset E^n$ zusammenhängend, $a, a \in C$ mit $f(a) \leq f(b)$:
$\forall y \in [f(p), f(q)] \exists x \in C$ mit $f(x) = y$

Beweis durch Zusammenhangsdefinition

2.5 Differentialrechnung

Differentierbarkeit **D** [1, 1.134] $O \subset^o \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
f heißt in $x \in O$ differentierbar, wenn
$\exists L \in \hom : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,
$r : O \longrightarrow \mathbb{R}^m$, die in x stetig und mit $\lim_{x \to y} r(y) = 0$, daß
$\forall y \in O$

$$f(y) = f(x) + L(y - x) + \parallel y - x \parallel r(x) \tag{2.14}$$

Totales Differential **D**

$$L = D_x f = \begin{pmatrix} f_1/u_1 & \cdots & f_1/u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n/u_1 & \cdots & f_n/u_n \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung **D** [1, 1.136] $f : O \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in x diffbar, $v \in \mathbb{R}^n$.
Die Richtungsableitung von f in Richtung $\underline{v}$ ist $\nabla : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\nabla_{\underline{v}} f|_x := D_x f(\underline{v}) \tag{2.15}$$

$$D_{\underline{v}} \underline{f}(\underline{a}) = \underline{f}'(\underline{a}, \underline{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{\underline{f}(\underline{a} + t\underline{v}) - \underline{f}(\underline{a})}{t} \tag{2.16}$$

$f'(\underline{a}, \underline{h}) := \frac{1}{t}(\underline{x} - \underline{a})$
$\forall h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \underline{f'}(\underline{a}, \underline{h}) &= \langle \nabla f(\underline{a}), \underline{h} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underline{f'}(\underline{a}, \underline{e}_i) \cdot h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} D_i \underline{f}(\underline{a}) \cdot h_i \end{aligned}$$

bestimmte Basis $e_1, ..., e_n$ partielle Ableitung.

Partielle Ableitung **D** [1, 1.136]

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} := (\nabla_{e_j})_i f = (D_x(e_j))_i \tag{2.17}$$

Besonderheit bei Differentierbarkeit **S**

- $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{sonst} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Kettenregel **S** [1, 1.139] $f : O \subset^o \mathbb{R}^n, O \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in x diffbar,
$f(O) \subset G, g : G \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ in $f(x)$ diffbar.
Dann $g \circ f$ in x diffbar

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{2.18}$$

Beweis $\exists f_1, g_1$, die an a und $b = f(a)$ stetig:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f_1(x) \cdot (x - a) \\ g(y) &= g(b) + g_1(y) \cdot (y - b) \end{aligned}$$

Für $g \circ f$ folgt:
$g(f(x) = g(b) + \underbrace{g_1(b + f_1(x)(x - a)) \cdot f_1(x)}_{g_2} \cdot (x - a)$
g_2 ist in a stetig und $g_2(a) = g_1(b) \cdot f_1(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

stetig dirrentierbar **D** [1, 1.144] $O \subset^o \mathbb{R}^n, f : O \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diffbar in O. f heißt in O stetig diffbar, wenn $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., m$ wenn partielle Ableitung $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ stetig sind.

Vektorfeld **D** [1, 1.160] $V(x)$ über $O \subset^o \mathbb{R}^n$ ist Abbildung, die jedem $x \in O$ einen Tangentialvektor $V(x)$ zuordnet
$V : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Integralkurve **D** [1, 1.160] Diffbare Kurve $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes V, wenn

$$\forall t \in I : \quad \dot{c}(t) = V(c(t)) \tag{2.19}$$

Gradient **D** [1, 1.164] $O \subset E^n f : O \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar so gilt $\forall v \in R^n$

$$< \nabla(f), v >= df(v) \tag{2.20}$$

Gradientenfeld **D** [1, 1.164]

$$\nabla f : O \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.21}$$

Lemma von Schwarz **S** [1, 1.168] $f : O \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ besitzt zweite stetige Ableitung: $\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial u_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}$

Satz von Rolle **S** [1, 1.168] $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, diffbar in $]a, b[$, $f(a) = f(b)$. Dann $\exists c \in]a, b[$ daß

$$f'(c) = 0 \tag{2.22}$$

Beweis Relation für Extremum annehmen $\forall x \in [a, b] f(x) \le f(c)$, Differentierbarkeit anwenden $\forall x \in [a, b] f(x) - f(c) = f_1(x) \cdot (x - c) \le 0$, wobei für $f_1(x) \le 0$ für $x > c$ oder $f_1(x) \ge 0$ für $x < c$. Wegen Stetigkeit aber wieder $f'(c) = 0 \exists \Rightarrow f_{min,max} \in [a, b]$

Mittelwertsatz **S** [1, 1.169] $f[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f :]a, b[$ diffbar. Dann $\exists c \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{2.23}$$

Beweis $\forall x \in [a, b] \quad h(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x$
$h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. Nach Satz von Rolle gilt $\exists c \in [a, b]$ mit $h'(c) = 0$. Also $0 = (b - a)f'(c) - (f(b) - f(a))$.

Zweiter Mittelwertsatz **S** $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ diffbar. $\forall x \in]a, b[g'(x) = 0$. Dann $\exists c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2.24}$$

Reihendifferentierbarkeitssatz **S** [1, 1.272] $f]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n+1}, x_0 \in]a, b[, \forall i = 1, ..., n : f^{(i)}(x_0) = 0$ und es gilt $\forall x \in]a, b[\exists x \le c \le x_0$

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{2.25}$$

Taylor-Entwicklung **S** [1, 1.273] $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n+1}, \forall (x, x_0) \in]a, b[\quad \exists c : \quad x_0 \le c \le x_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}_{T(x)} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{R(x)} \\ f(x) &= T(x) + R(x) \end{aligned}$$

, wobei: $T(a)$ Taylorpolynom, $R(a)$ Lagrangesches Restglied.

Beweis $g(y) := f(y) - T(y), \quad \forall y \in]a, b[$, für das gilt $g \in C^{n+1}, g(x_0) = 0$
$g^{(k)}(y) = f^{(k)} - \sum_{i=k}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-k)!}(x - x_0)^{(i-k)}$
$g^{(k)}(y) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$
$g^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) \forall y \in]a, b[$
laut Reihendifferentierbarkeitssatz $\forall x \in]a, b[\exists x \le c \le x_0$, für welches gilt

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Satz von Taylor **S** [1, 1.273] Ist $f^{(n+1)}$ in der Umgebung von a beschränkt, dann $R(a) = 0$

Taylorreihe **D**

$$s(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{2.26}$$

Ausnahme für Taylorreihe **R**

$$f(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{c} & x > 0, \quad s(f, x_0) \ne f(x) \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

Regel von de l'Hospital **S** [1, 1.275] $f, g]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal diffbar.
Für $x > a$ und $\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0, g'(x) = 0 \ne 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.28}$$

Beweis f, g stetig nach a, also o.B.d.A $f(a) = f(b) = 0$.
Mittelwertsatz auf $[a, x]$, $\exists y$ mit $a < y < x$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$. Bilde Folge $(x)_n$ mit $\lim_n = a$. Für jedes x_n wählt man mit Mittelwertsatz ein y_n mit $a < y_n < x_n$, wobei $y_n = a$. Nach Vorraussetzung $\exists \lim_n \frac{f'(y)}{g'(y)}$. $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$

Definitheit von Matrizen **D** [1, 1.60] $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrische Matrix.
A heißt positiv definit, falls $\forall c \in \mathbb{R}^n \backslash 0 \quad \langle c, Ac \rangle > 0$
A heißt positiv semidefinit, falls $\forall c \in \mathbb{R}^n \quad \langle c, Ac \rangle \ge 0$
A heißt negativ (semi-)definit, falls $-A$ positiv (semi-)definit ist.
A heißt indefinit, falls $\exists b, c \in \mathbb{R}^n \quad \langle b, Ab \rangle > 0, \quad \langle c, Ac \rangle < 0$

Definitheit und Unterdeterminanten **S** [5, 61] $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrische Matrix. A positiv definit, wenn $k = \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

Hessematrix **D** [5, 59] $U \subset^o \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar.

$$\forall 1 \le i, j \le n \quad Hf(x) := \partial_i \partial_j f(x) \tag{2.29}$$

$$Hf(x) \mid_{(x_0, y_0)} = D_m f(x_0) = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x_0) & \cdots & D_m D_1 f(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 D_m f(x_0) & \cdots & D_m D_m f(x_0) \end{pmatrix}$$

$Hf(x)$ ist symmetrisch wegen Satz von Schwarz.

Extremum **S** [1, 1.279] $f : D \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. f hat in x_0 relatives Extremum, wenn $\forall i = \{1, ..., n\} \quad \frac{\partial f}{\partial u_i}(x_0) = 0$.

- $Hf(x)$ positiv definit: f hat in x isoliertes Minimum
- $Hf(x)$ negativ definit: f hat in x isoliertes Maximum
- $Hf(x)$ indefinit: f hat kein lokales Extremum

Extremum im 2-dim **S** [1, 1.282] $f : D \subset^o \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $x_0, y_0 \in D$ als relatives Extremum, daß

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} \equiv 0$$

notwendigerweise erfüllt ist.
Sattelpunkt, wenn $\det Hf(x) < 0$
Minimum, wenn $\det Hf(x) > 0$ und $\operatorname{tr} Hf(x) > 0$
Maximum, wenn $\det Hf(x) > 0$ und $\operatorname{tr} Hf(x) < 0$

Satz über implizite Funktionen **S** (1-dim Spezialfall) $G \subset^o \mathbb{R}^2, \quad f \in C^1(G), \quad z_0 := (y_0, x_0) \in G$
falls $f(z_0) = 0$ und $D_1 f(z) = \frac{\partial}{\partial y} f(y, x) \mid_{(x,y)} \ne 0$
dann existiert $U_\varepsilon(x_0)$ und $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

- $h(x_0) = y_0$
- $h \in C^1(U)$
- $f\big(h(x), x\big) = 0 \quad \forall x \in U$

h ist lokale Auflösung nach y von $f(y, x)$.

Satz über implizite Funktionen R

$$\begin{aligned} f(y,x) &= \sin y + 2y - x \\ f(0,0) &= 0 \\ D_1 f(y,x) &= \cos y + 2 \\ D_1 f(0,0) &= 3 \neq 0 \\ h \text{ auf } U_\varepsilon x_0 : &\quad \sin(h(x)) + 2h(x) - x = 0 \\ h \text{ ist Auflösung nach } y \text{ von } f(y,x) \\ h'(0) &= -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen S $m \in \mathbb{N}, \quad G \subset^o \mathbb{R}^m, \quad f \in C^1(G, \mathbb{R}^m), \quad x_0 \in G, y_0 := f(x_0)$ dann gibt es Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$

- $f|_U: \quad U \longrightarrow V$ bijektiv
- Umkehrabbildung $g := (f|_U)^{-1}: \quad V \longrightarrow U, \quad g \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$
- $D_g(y) = \left(Df(g(y))\right)^{-1}$ Inverse der Matrix $Df(x)|_{x=g(y)}$

Umkehrfunktion S [2, 260] $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad \det D_x|_a \neq 0, \quad f$ injektiv, diffbar in a, $f(a) \neq 0$. Wenn Umkehrabbildung $g = f^{-1}$ an Stelle $b = f(a)$ stetig ist, dann ist g in $f(a)$ diffbar und

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \tag{2.30}$$

2.6 Integrationstheorie

Riemannintegral D [1, 1.173] $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := O(f,[a,b]) = U(f[a,b])$ Riemann-Integral geht liegt vor, wenn Ober- und Unterintegral bei genügend kleiner Intervallschachtelung zusammenfallen.

Stetigkeit und Integrierbarkeit S [1, 1.175] $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f:[a,b]$ integrierbar.

Beweis Gleichmäßige Stetigkeit auf Intervallschachtelung anwenden $O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{i=1}^{k}(z_i - z_{i-1})\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Integralregeln S

- $f \rightarrow \int\limits_a^b f\mathrm{d}x \in \hom$
- $f,g:[a,b]$ und $f \geq g \longrightarrow \int\limits_a^b f\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b g\mathrm{d}x$
- $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\forall x \in [a,b]:$
- $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Integral ist beschränkte Linearform S [2, 357] Das Riemann-Integral ist beschränkte Linearform I des $\mathbb{R}$: $I(f) \leq (b-a) \parallel f \parallel$, I ist dehnungsbeschränkt also stetig.

Unbestimmtes Integral D [1, 1.179] $f:[a,b]$ integrierbar. Dann $\forall y \in [a,b] \quad I(y) := \int_a^y f(x)\mathrm{d}x$ ist $I: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig.

Stammfunktion D [1, 1.179] $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. F ist Stammfunktion von f, wenn F stetig diffbar und $\forall x \in [a,b]$

$$F'(x) = f(x) \tag{2.31}$$

Bestimmtes Integral S [1, 1.179] Für jede Stammfunktion F von f gilt $\forall (y,z) \in [a,b], y < z$

$$F(z) - F(y) = \int_y^z f(x)\mathrm{d}x \tag{2.32}$$

Partielle Integration S [1, 1.180] $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f' \cdot g(x)\mathrm{d}x = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g'(x)\mathrm{d}x \tag{2.33}$$

Beweis Produktregel, Integral auftrennen und bestimmtes Integral berechen und umstellen

Substitutionsregel S [1, 1.181] $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $g(a) < g(b), g([a,b]) \subset [g(a), g(b)]$ $f:[g(a),g(b)] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^b ((f \circ g) \cdot g')\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y \tag{2.34}$$

Beweis Verkettung gleich $(F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g)g'$, was laut bestimmten Integral $\int_a^b ((f \circ g)g')(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y = F(g(b) - g(a))$

Mittelwertsatz der Integration S [1, 1.180] $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a) \tag{2.35}$$

Ausgewählte Stammfunktionen S

f(x)	F(x)	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert(f)\rvert$	
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$	

2.7 Erweiterung der Integrationstheorie

Kurvenintegral D [1, 1.186] $\omega(t)$ stetige 1-Form längs der diffbaren Kurve $c(t)$,$t \in [a,b]$

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega(t)\dot{c}(t)\mathrm{d}t \tag{2.36}$$

,wobei $\omega(t)\dot{c}(t)$ stückweise stetig.

Bogenelement D [1, 1.188] $c:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve mit stetigen Tangentenfeld $V \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n =$

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad \omega(t)(\underline{v}) :=< \frac{\dot{c}(t)}{\parallel \dot{c}(t) \parallel}, \underline{v} > \tag{2.37}$$

Bogenlange:

$$\begin{aligned} B(c) &= \int\limits_c \omega_c \\ B(c) &= \int\limits_a^b \parallel \dot{x}(t) \parallel \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Kurvenintegral über Vektorfeld **D** [1, 1.190] $\underline{V}(t)$ stetiges VF, also $V \in C^0(G \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, längs der Kurve $c \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\omega_{\underline{V}}$ zugeordnete 1-Form.

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \omega_{\underline{V}(t)}(\underline{u}) =< \underline{V}(t), \underline{u} > \int_c \underline{V} \mathrm{d}\underline{s} = \int_a^b < \underline{V}(t), \dot{c}(t) > \mathrm{d}t \tag{2.38}$$

Potentialfeld **D** [3, 2.721] $m \in \mathbb{N}$, $G \subset^o \mathbb{R}^m$, $g \in C^0(G, \mathbb{R}^m)$, $G_0 \subset^G G$

1. g in G_0 Potentialfeld $\leftrightarrow$
   $\exists q \in C^1(G_0)$ mit $\nabla q(x) = g(x) \quad \forall x \in G_0$
2. g Potentialfeld $\leftrightarrow$
   $D(g) = G \subset^G$ und g in G Potentialfeld

konservativ **D** [1, 1.191] $V : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. V heißt konservativ, wenn $\forall p, q \in D$, die stetig diffbare Kurve $c : p \to q$, der Wert des Kurvenintegral ist nur von p und q abhängig.

Potential $\Leftrightarrow$ konservativ **D** [1, 1.192] Sei $D \subset^o \mathbb{R}^n$, $\underline{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}$. V heißt konservativ, wenn $\forall (p,q) \in D$ und für jede stetig diffbare Kurve c, die Anfangspunkt p und Endpunkt q hat, der Wert von $\int_c \underline{V} \mathrm{d}\underline{s}$ nur von p und q abhängt.
also $m \in \mathbb{N}$, $G \subset^o \mathbb{R}^m$, $g \in C^0(G, \mathbb{R}^m)$, $G_0 \subset G$

1. g in G_0 konsvervativ $\leftrightarrow$ g in G_0 Potentialfeld
2. $\exists q \in C^(G_0)$, $y, z \in G_0$ stückweise stetig

$$\int\limits_y^z \langle g(x), \mathrm{d}x \rangle := \int\limits_{K_{y,z}} \langle g(x), \mathrm{d}x \rangle = q(z) - q(y) \tag{2.39}$$

Geschlossenes Integral eines konservativen Felds **S** [1, 1.192]

$$\oint_c \underline{V} \mathrm{d}\underline{s} := \int_c \underline{V} \mathrm{d}\underline{s} = 0 \tag{2.40}$$

Jordan-Inhalt **D** [1, 1.199] oder auch Jordan-Nullmenge
$A \subset \mathbb{R}^n$. A hat verschwindenden Jordan-Inhalt, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ endlich viele offene Quader Q_i^o, $i = 1, ..., k$, daß

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k Q_i^o$$
$$\sum_{i=1}^k vol(Q_i^o) < \varepsilon$$

Verschwindende Jordaninhalt bei:

- endlichen Mengen
- kompakte Bilder von regulären Kurven oder Flächen
- endliche Vereinigung von Mengen verschwindenden Jordaninhalts

Jordaninhalt und Integrierbarkeit **S** [1, 1.199] Q abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^n$, $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $A \subset Q$ mit verschwindenden Jordaninhalt und $f|(Q \backslash A)$ stetig. Dann ist f über Q integrierbar.

Kriterium für Integrierbarkeit **S** [3, 2.762] (hinreichendes Kriterium)
$m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a < b$, $Q = [a, b]$, $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.
Falls f stetig bis auf Nullmenge, d.h. falls $\exists N \subset \mathbb{R}^m$, daß $f \mid_{Q \backslash N} \in C^0$, dann f über Q integrierbar.

Satz von Fubini **S** [1, 1.203] $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Rechteck Q integierbare Funktion.

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_C f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{2.41}$$

Tranformationsformel **S** [1, 1.208] $T : A \longrightarrow B$ krummlinige Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^m$, G ein zulässiger Bereich im $\mathbb{R}^m$ mit $G \subset D, f : T(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige und beschränkte Funktion. $T(G)$ ist ein zulässiger Bereich und f über $T(G)$ integrierbar.

$$\int_G (f \circ T) |\det(DT)| \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n = \int_{T(G)} f \mathrm{d}u_1^* \mathrm{d}u_n^* x \tag{2.42}$$

2-Form **D** [1, 1.212] Abbildung $\Omega : \mathbb{R}^\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, bilinear, antisymmetrisch
mit Basendarstellung in einer $n \times n$-Matrix mit den Koeffizienten $\Omega_{ij} := \Omega(\underline{v}, \underline{u})$

$$\Omega(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \Omega_{ij} \tag{2.43}$$

2-Form-Anwendung **S** [1, 1.213] Ω sei 2-Form über $D \subset \mathbb{R}^3$. Dann $\Omega_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ mit

$$\Omega = \Omega_1 \mathrm{d}u_2 \wedge \mathrm{d}u_3 + \Omega_2 \mathrm{d}u_3 \wedge \mathrm{d}u_1 + \Omega_3 \mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2 \tag{2.44}$$

Ω stetig diffbar, wenn alle Ω_i stetig diffbar-

Oberflächenintegral **D** [1, 1.214] G abgeschlossene zulässiger ebener Bereich regulär parametrisiertes Flächenstück, $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Ω stetige 2-Form längs F, u, v Flächenparameter

$$\int_F \Omega := \int_G \Omega(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \tag{2.45}$$

Flächeninhalt **D** [1, 1.216] G abgeschlossene zulässiger ebener Bereich regulär parametrisiertes Flächenstück, $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : \quad N_0(u,v) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \|}$ Die Oberflächenform von F in kartesischen Koordinaten

$$\Omega_F|_{(u,v)} := \det(N_0(u,v), x, y) \tag{2.46}$$

Die A Oberfläche oder Flächeninhalt von F

$$A(F(G)) := \int_F \Omega_F \tag{2.47}$$

Fluß durch Fläche **D** [1, 1.217] G abgeschlossene zulässiger ebener Bereich regulär parametrisiertes Flächenstück,
$F : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$, V ein auf einer offenen Obermenge von $F(G)$ definiertes stetiges Vektorfeld.

$$\int_F \Omega_V = \int_G \det(V, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \tag{2.48}$$

ergibt

$$\int_F \Omega_V = \int_G \left\langle (V, \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}) \right\rangle \mathrm{d}u \mathrm{d}v \tag{2.49}$$

3-Form **D** [1, 1.219] $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, multilinear und antisymmetrisch

Äußeres Differential **D** [1, 1.222] $\omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathrm{d}u_i$ ist 1-Form

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial u_j} \mathrm{d}u_j \wedge \mathrm{d}u_i \tag{2.50}$$

(Cartansche Ableitung)

Zweifache Äußeres Differential **S** [1, 1.222] $\mathrm{dd}\omega = 0$

Beweis Linearitäten und umstellen, substrahierend streichen.

2.8 Integralsätze der Vektoranalysis

Rotation, Divergenz **D** [1, 1.223]

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} V &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial u_2}-\frac{\partial V_2}{\partial u_3}, \frac{\partial V_1}{\partial u_3}-\frac{\partial V_3}{\partial u_1}, \frac{\partial V_2}{\partial u_1}-\frac{\partial V_1}{\partial u_2}\right)\\ \operatorname{div} V &= \frac{\partial V_1}{\partial u_1}+\frac{\partial V_2}{\partial u_2}+\frac{\partial V_3}{\partial u_3}\\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u_3^2}\end{aligned}$$

Rotation **D** [3, 2.729] $m \in \mathbb{N}, \quad G \subset^G \mathbb{R}^m, \quad g \in C^1(G, \mathbb{R}^m), \quad x_0 \in G$

$$\operatorname{Rot} g(x_0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.51}$$

Rotation als Bilinearform **S** $G \subset^G \mathbb{R}^2, \quad g \in C^1(G, \mathbb{R}^2), \quad x \in G, \quad u, v \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{Rot} g(x)(u,v) = \underbrace{D_1 g_2(x) - D_2 g_1(x)}_{\operatorname{rot} g(x)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \tag{2.52}$$

induzierte Form **D** [1, 1.224] $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diffbar, $D \subset^o \mathbb{R}^r$, $r = 1, 2$
ϕ eine k-Form über $f(D), k = 1, 2, 3$
Induzierte k-Form $(D^* f)(\phi)$

$$\begin{aligned} D^* f(\omega)|_p &:= \omega_{f(p)} \circ D_p f\\ D^* f(\Omega)|_p &:= \Omega_{f(p)} \circ (D_p f \times D_p f)\\ D^* f(\nu)|_p &:= \nu_{f(p)} \circ (D_p f \times D_p f \times D_p f)\end{aligned}$$

Assoziativität **S** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f \in C^2$, $D \subset^o \mathbb{R}^2$, ω 1-Form

$$\begin{aligned} D^* f(\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}(D^* f(\omega))\\ D^* f(\mathrm{d}\Omega) &= \mathrm{d}(D^* f(\Omega))\end{aligned}$$

Integralsätze **S** [1, 1.231] F orientiertes Flächenstück, das postitiv parametrisiert ist, ω eine stetig diffbare 1-Form längs F.

$$\int_F \mathrm{d}\omega = \int_{\partial F} \omega \tag{2.53}$$

G räumlicher Bereich, der postiv über einem Quader parametrisiert ist, Ω stetig diffbare 2-Form längs G.

$$\int_G \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial G} \Omega \tag{2.54}$$

Gaußscher Satz **S** [1, 1.233] V stetig diffbares VF über Abschlußeines räumlichen Bereichs G, N die Einheitsnormale von ∂G. Dann gilt für den Flußvon V durch die Randfläche ∂G von G

$$\int_{\partial G} \Omega_V = \int_{\partial G} \langle V, N\rangle\, \Omega_{\partial G} = \int_G \operatorname{div} V \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.55}$$

oder
$m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2, \quad G \subset^Z \mathbb{R}^m, \quad g \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^m)$

$$\int\limits_G \div g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial G} \langle g(x), n(x)\rangle\, \mathrm{do} \tag{2.56}$$

Stokesscher Satz **S** [1, 1.234] V stetig diffbares VF längs einer orientierten Fläche F, N die Einheitsnormale von F.

$$\int_{\partial F} V \mathrm{d}s = \int_F \Omega_{\operatorname{rot} V} = \int_F \langle \operatorname{rot} V, N\rangle\, \Omega_F \tag{2.57}$$

oder
F zulässiges Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ mit Normalenfeld $n(\cdot)$, $\quad G \subset^G \mathbb{R}^3$, daß das Flächenstück umfaßt, $\quad g \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$

$$\int\limits_G \langle \operatorname{rot} g(x), n(x)\rangle\, \mathrm{do} = \int\limits_{\partial F} \langle g(x), \mathrm{d}x\rangle \tag{2.58}$$

oder spezieller
F zulässiges Gebiet in $\mathbb{R}^2$, $\quad g \in C^1(F, \mathbb{R}^m)$

$$\int\limits_F \operatorname{rot} g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial F} \langle g(x), \mathrm{d}x\rangle \tag{2.59}$$

Greensche Formeln **S** [3, 2.889] $m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2$
$G \subset^{zG} \mathbb{R}^m, \quad n(\cdot)$ Feld der äußeren Normalen auf ∂G,
$u, v \in C^2(\overline{G})$

1. $\int\limits_G \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle\, \mathrm{d}x = -\int\limits_G u(x)\Delta v(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial G} u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\mathrm{do}$
2. $\int\limits_G (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial G} \left(u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\right) \mathrm{do}$
3. $\int\limits_G \Delta u(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\mathrm{do}$

2.9 Fourier und Weierstraß

Besselsche Ungleichung **S** [3, 2.1079] H ist (Prä-)Hilbertraum in $\mathbb{C}$, $\quad \{\phi_k\}$ ONS in H, $\quad \forall u \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \phi_k\rangle|^2 \leq \| u \|^2 \tag{2.60}$$

Vollständiges ONS im Hilbert-Raum **D** H ist (Prä-)Hilbert-Raum, $\{\phi_k\}$ ONS in H, $\quad \{\phi\}$ ist vollständig

$$\operatorname{span}\{\phi_k\} = \operatorname{dicht} H \tag{2.61}$$

ONS im Hilbert-Raum **S** [3, 2.1080] $\{\phi_k\}$ ist ONS

1. $\{\phi_k\}$ vollständiges ONS
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \| u - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle u, \phi_k\rangle\, \phi_k \| = 0 \quad \forall i \in H$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle u, \phi_k\rangle|^2 = \| u \|^2$ (Parsevalsche Ungleichung $\forall u \in H$)

Weierstraßscher Approximationssatz **S**

1. $m \in \mathbb{N}, \quad K \subset^K \mathbb{R}^m$
   Zu $f \in \mathbb{C}^0(K, \mathbb{C})$ und $q > 0$ gibt es Polynom p mit m Variablen mit
   $$\sup_{x\in K} |f(x) - p(x)| < q \tag{2.62}$$
2. Zu jeder auf einer kompakten Teilmenge K des $\mathbb{R}^m$ stetigen, komplexwertigen Funktion f existiert eine Folge $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vom Polynomen, die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.
3. Für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^m$: Der Raum der auf K eingeschränkten Polynome von m Variablen liegt dicht in $(C^0(K, \mathbb{C}), \| \cdot \|)$

Fourier-Reihe **S** $f \in \mathbb{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, $c_k$bzw. a_0, a_k, b_k Fourierkoeffizienten von f falls FR von f in $[-\pi,\pi]$ gleichmäßig konvergent ist dann $f(-\pi) = f(\pi)$ und

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad x \in [-\pi,\pi] \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \qquad = 0(\text{ungerade}) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \qquad = 0(\text{gerade}) \end{aligned}$$

Schwartz-Raum **D** [3, 2.1126] Der Raum $S(\mathbb{R}^n)$ der stark abfallenden C^∞-Funktionen

$$S(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})\} \tag{2.63}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$ mit dem Paradebeispiel $f(x) = \exp -x^2$

Fourier-Transformierte **S** $n \in \mathbb{N}$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und ihre invers Transformierte

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\mathrm{d}x \\ \check{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}kx} f(k)\mathrm{d}k \end{aligned}$$

2.10 Banachscher Fixpunktsatz

Kontrahierende Abbildung **D** [1, 2.105] $\exists k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1$, mit

$$\forall u, v \in V: \quad \| f(u) - f(v) \| \leq k\cdot \| u - v \| \tag{2.64}$$

Banach-Raum **D** [1, 2.104] Ein normierte Vektorraum heißt vollständig oder Banach-Raum, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Banachscher Fixpktsatz **D** [1, 2.105] $(V, \| \cdot \|)$ ein Banach-Raum, $f : V \longrightarrow V$ kontrahierende Abbildung. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Fixpunkt w mit

$$\begin{aligned} f(w) &= w \\ \forall u \in V: \quad w &= \lim_{n\to\infty} f^n(u) \end{aligned}$$

3 Lineare Algebra

3.1 Vektorräume

Vektorraum **D** nichtleere Menge V. Elemente heißen Vektoren. Addition ordnet Paar u, v ein Elemten $w \in V$ zu, die Multiplikation λv ein Elemente $w \in V$ zu.

Bedingungen

- $\forall u, v, w \in V: \quad u + (v + w) = (u + v) + w$ (Assoziativität)
- $\forall u, v \in V: \quad u + v = v + u$ (Kommutativität)

- $\exists o \in V, \forall u \in V: \quad u + o = u$ (neutrales Element)
- $\forall u \in V, \exists w \in V: \quad u + w = o$ (inverses Element)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}: \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ (Assoziativität)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}: \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ (Distrinutivität)
- $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}: \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in V: \quad 1u = u$

Lineare Unabhängigkeit **D** [1, 1.11] $\{u_1, ..., u_k\}$ System von Vektoren im Vektorraum V. System $u_i \in \mathbb{R}$ ist lineaer unabhängig $\Leftrightarrow$ einzige Linearkombination der $u_i, i = 1, ..., k$ den Nullvektor ergibt, nur wen Nullfaktoren vorliegen.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \underline{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \tag{3.1}$$

Prüfung der Linearen Unabhängigkeit **S** [1, 1.11] System $u = (a_{1i}, ..., a_{ni}), i = 1, ..., k$ sowie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \underline{0}$.
Dann muß Gleichungssystem erfüllt sein: $\sum_{i=1}^{k} a_{ji}\lambda_i = 0, j = 1, ..., n$

Erzeugendensystem **D** [1, 1.11] Teilmenge E des Vektorraums V. Jedes Element aus V laßt sicht mit Erzeugendensystem mit E darstellen.

Basis **D** [1, 1.11] ist System von Vektoren, das linear unabhängig und erzeugend ist.

Austauschsatz **S** [1, 1.12] $A = \{s_1, ..., s_a\}, B = \{t_1, ..., t_b\}, a \geq b$.
$a - b$ Vektoren von A und Vektoren von B bilden linear unabhängiges System.

Austauschsatz **S** [3, 1.362] V linearer Raum über $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$, $b_1, ..., b_n \in V$ linear unabhängig
$k \leq n$, $a_1, ..., a_k \in V$ linear unahängig
dann existieren $j_{k+1}, ..., j_n \in \{1, ..., n\}$ so, daß
$a_1, ..., a_k, b_{j_{k+1}}, ..., b_{j_n}$
linear unabhängig sind, d. h. man kann k der b_j durch $a_1, ..., a_k$ ersetzen unter Beibehaltung der linearen Unabhängigkeit.

Basissatz **S** [1, 1.12] Jede mögliche Basis desselben Vektorraums besitzt eine feste Anzahl von Elementen.

Dimension **D** [1, 1.12] maximale Anzahl der Elemente einer Basis

Basisergänzungssatz **S** [1, 1.12] Jedes System linear unabhängiger Vektoren kann zu einer Basis ergänzt werden.
Also sei V linearer Raum mit $n := \dim V < \infty$
$k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ und $a_1, ..., a_k \in V$ linear unabhängig.
Dann läßt sich $\{a_1, ..., a_k\}$ zu einer Basis ergänzen, d.h. es existieren $a_{k+1}, ...a_n \in V$
daß $\{a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n\}$ Basis von V ist.

Komponenten **D** [1, 1.15] (auch Koordinaten genannt)
$B = \{u_1, ..., u_n\}$ Basis des n-dimensionalen Vektorraums V. $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$.
a_i heißen Komponenten von v bezüglich der Basis B. Für $v \in V$ heißen die durch

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \tag{3.2}$$

eindeutig bestimmten reellen Zahlen a_i die Komponenten.

Lineare Hülle **D** oder auch Spann
V linearer Raum über $\mathbb{K}$, $\quad M \subset V$ Die Lineare Hülle ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen von M

$$\text{span} M := \{x \mid x \in V \text{mit} x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \quad \} \tag{3.3}$$

Untervektorraum **D** [1, 1.19] $U \subset V$ heißt Untervektorraum, wenn $\forall u, v \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad \lambda u + \mu v \in U$

Direkte Summe **D** [1, 1.21] $U_i, i = 1, ..., k$ Unterräume des VR V. $W = \sum_{i=1}^{k} U_i$ heißt direkte Summe,

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i \tag{3.4}$$

wenn $\forall w \in W$ die Anteile $u_i \in U_i$ durch $w = \sum_{i=1}^{k} u_i$ durch w eindeutig bestimmt sind.

Unterraum **D** [3, 1.373] oder auch Teilraum genannt
V linearer Raum über $\mathbb{K}$, $\quad U \subset V$
U heißt Unterraum von V wenn

1. $\forall u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$
2. $\forall u \in V, \quad \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in U$

Vereinigungen von Unterraume **D** [3, 1.376] V linearer Raum über $\mathbb{K}$, $\quad U, W \subset V$

1. $U + W := \{x \mid x \in V, \quad \exists u \in U, \exists w \in W: \quad x = u + w\}$ heißt Summe der Teilräume von U und W
2. $U \cap W = \{0\} \quad \Longrightarrow U + W$ heißt direkte Summe: $\quad U \oplus W$

Dimensionssatz für UVR **S** [1, 1.23] $U, W \subset V$

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W \tag{3.5}$$

Beispiel für Dimensionssatz **R** $U = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dim(U + W) + \dim(U \cap W) &= \dim U + \dim W \\ 3 + 1 &= 2 + 2 \end{aligned}$$

3.2 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung **D** [1, 1.48] $f : V \longrightarrow W, \quad V, W$ reelle Vektorräume.
f ist linear wenn: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in V:$

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \tag{3.6}$$

Typen der linearen Abbildungen **D** [4, 82] $f : V \longrightarrow W$

Monomorphismus	injektiv
Epiomorphismus	surjektiv
Isomorphismus	bijektiv
Endomorphismus	$V = W$
Automorphismus	$V = W$ und bijekitiv

Kern **D** [1, 1.48] $f : V \longrightarrow W, \quad V, W$ Vektorräume und f lineare Abbildung.

$$Ker f := \{v \in V | f(v) = \underline{0}\} \tag{3.7}$$

Bild **D** [1, 1.48]

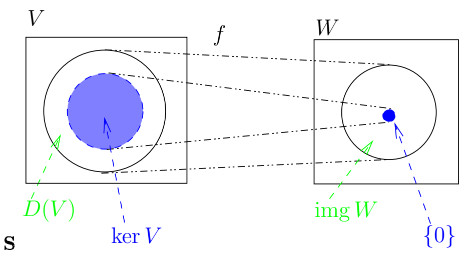
$$\text{img} f := f(V) \tag{3.8}$$

Rand und Defekt **D** [1, 1.48]

$$\begin{aligned} \text{rg} f &:= \dim \text{img} f \\ \text{de} f &:= \dim \ker f \end{aligned}$$

Dimensionsformel **S** [1, 1.49] $f : V \longrightarrow W$

$$\begin{aligned} \dim V &= \text{rg} f + \text{de} f \\ \dim V &= \dim \text{img} f + \dim \ker f \end{aligned}$$



Bildliche Darstellung der Dimensionen **S**

Kern und Invertierbarkeit **S** [3, 1.403] $A : V \longrightarrow W$

1. f invertierbar $\Longleftrightarrow \quad \dim \ker V = 0$
2. f invertierbar $\Longleftrightarrow \quad \dim V = \dim \text{img} W$

Dualraum **D** [1, 1.62] Dualraum V^* zum Vektorraum V

$$V^* := \{\hom : V \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{3.9}$$

Duale Abbildung **D** [1, 1.62] $f^* : W* \longrightarrow V^*$ zu $f : V \longrightarrow W, \quad \forall \phi \in W^*$:

$$f^*(\phi) := \phi \circ f \tag{3.10}$$

duale Abbildung **D** [1, 1.62] $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ zu linearer Abbildung $f : V \longrightarrow W$, wenn $\forall \phi \in W^*$

$$f^*(\phi) := \phi \circ f \tag{3.11}$$

Dualbasis **D** [1, 1.63] V ist n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, ..., b_n\}$. $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$, wobei

$$\phi_i(b_k) := \delta_{ik} \tag{3.12}$$

Rieszscher Darstellungssatz **S** [3, 1.424] $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ linearer Raum

1. $\forall f \in V^\star \quad \exists y \in V, \quad x \in V$ mit
$$f(x) = \langle x, y \rangle \tag{3.13}$$
2. die Abbildung $S : V^\star \longrightarrow V, \quad f \mapsto y$ ist bijektive lineare Abbildung

Dualität **D** [1, 1.85] V, V^* sind VR. Metrische Dualität durch Skalarprodukt

$$\forall u, v \in V: \quad \delta_g : V \longrightarrow V^* \tag{3.14}$$

$$\delta_g(u)(v) := \langle u, v \rangle \tag{3.15}$$

Duale Basen **S** [1, 1.85] $\forall \phi \in V^* \quad \exists w \in V$

$$\forall v \in V: \quad \phi(v) = \langle w, v \rangle$$

$$\delta_g(u_j) = \sum_{i=1}^{k} g_{ij} \phi_i$$

3.3 Lineare Systeme

Lösungserhaltende Umformungen **D** $(A, \underline{b})$

- Zeile oder Spalte vertauschen
- Zeile oder Spalte mit Faktor $\mu \neq 0$ multiplizieren und zu einer Zeile oder Spalte addiert

Kriterium für Lösbarkeit des LGS **S** [1, 1.46]

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b) \tag{3.16}$$

Eindeutigkeit von Lösungen linearer Gleichungssysteme **S** [3, 1.470] $m, n \in \mathbb{N}, \quad A \in M_{\mathbb{K}}^{m \times n}$

1. $\forall b \in V_{\mathbb{K}}^m$ hat $Ax = b$ höchstens 1 Lsg $x_0 \in V_K^n$
2. $Ax = 0$ trivial nur für $x = 0$
3. $\ker A = \{0\}$
4. $A: \quad V_{\mathbb{K}}^n \longrightarrow V_{\mathbb{K}}^m$ injektiv
5. $\operatorname{rg} A = n$

Existenz von Lösungen linearer Gleichungssysteme **S** [3, 1.471] $m, n \in \mathbb{N}, \quad A = (a_1, ..., a_n) \in M_{\mathbb{K}}^{m \times n}, \quad b \in V_{\mathbb{K}}^m, \quad (A, b) \in M_{\mathbb{K}}^{m \times (n+1)}$

1. $Ax = b$ hat wenigsten 1 Lsg
2. $b \in \mathrm{i}W(A)$
3. $b \in \operatorname{span}\{a_1, ..., a_n\}$
4. $\operatorname{span}\{a_1, ..., a_n\} = \operatorname{span}\{a_1, ..., a_n, b\}$

Erweiterte Matrix und dessen Lösungen **S** [3, 1.473] $m, n \in \mathbb{N}, \quad A \in M_{\mathbb{K}}^{m \times n}$

1. $Ax = b$ hat für alle $b \in V_{\mathbb{K}}^n$ höchsten eine Lsg $\Longleftrightarrow$
$$\operatorname{rg} A = n \tag{3.17}$$
2. $b \in V_{\mathbb{K}}^m$, $Ax = b$ hat (wenigstens) eine Lsg $\Longleftrightarrow$
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b) \tag{3.18}$$
3. $b \in V_{\mathbb{K}}^m$, $Ax = b$ hat genau eine Lsg $\Longleftrightarrow$
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b) = n \tag{3.19}$$

3.4 Matrizen und Determinanten

Matrixprodukt **D** [1, 1.54] $A \in (a \times n, \mathbb{R}), B \in (n \times b, \mathbb{R}) \longrightarrow C \in (a \times b, \mathbb{R}), \quad \forall i = 1, ..., b, \quad j = 1, ..., a:$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{3.20}$$

Matrizeninversion **S** [6, 1.54] $\hat{A}_{ij}$ ist Streichungsmatrix, für alle Elemente i, j gilt

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} a_{ij} \hat{A}_{ij} \tag{3.21}$$

Gauß-Algorithmus Es wird die Matrix A und Einheitsmatrix E gleichermaßen umgeformt, daß

$$(A|E) \Rightarrow (E|A^{-1}) \tag{3.22}$$

Allgemein notwendig $\det A \neq 0$, Streichungsmatrix A_{ij}, $\forall i, j$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A_{ij})^T \tag{3.23}$$

Cramersche Regel **S** [1, 1.60] $A\underline{x} = \underline{b}$, A_i ist A, in der die i-te Spalte gegen den Spaltenvektor $\underline{b}$ ersetzt worden ist

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \tag{3.24}$$

2 × 2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Determinante **D** [4, 136] Abbildung $\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

- linear in jeder Zeile
- $\operatorname{rg} M < n \Rightarrow \det A = 0$
- $\det E = 1$

Signum **D** [1, 1.38] $\sigma \in S(n), \quad S(n)$ ist symmetrische Gruppe, $\varepsilon(\sigma)$ Anzahl der Paare (i, j) von ganzen Zahlen in $i = 1, ..., n$, für die gilt $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \tag{3.25}$$

Determinante **D** [1, 1.38] (Leibnizscher Entwicklungssatz einer Matrix) $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ mit Koeffizienten a_{ij}, S symmetrische Gruppe, dann

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{3.26}$$

einfache Determinanten **S** [1, 1.38]

2x2 $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ab - cd$

Diagonalmatrix $\forall i > j$ bzw. $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$ gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Determinantenumformung **S** [1, 1.39] Alle Elementarumformungen erlaubt, nur folgende Einschränkungen:

- **Vertauschung** $A \to A^*$ durch Permutation τ in der Form $a_{ij}^* = a_{\tau^{-1}(i)j}$ dann gilt $\det A = \operatorname{sign} \tau \det A$
- **2 gleiche Zeilen** $\det A = 0$
- **Transponiertheit** $\det A = \det A^T$

Laplacescher Entwicklungssatz **S** [1, 1.42] $i, j = 1, ..., n,$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \\ \det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \end{aligned}$$

Rang **D** [1, 1.45] $A \in (n \times m, \mathbb{R})$, $\operatorname{rg} A$ ist Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von A.

Determinanten und Rang **S** [1, 1.44] $A \in (n \times n, \mathbb{R})$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$$
Zeilen/Spalten von A sind linear unabhängig.

Rangerhaltende Umformungen **S** [1, 1.45] Elementarumformung

3.5 Euklidische Räume

Skalarprodukt **D** [1, 1.71] $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\forall u,v,w \in V, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}: \quad \langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda \langle u,v\rangle + \mu \langle u,w\rangle$
- $\forall u,v \in V: \quad \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
- $\forall u \in V: \quad \langle u,u\rangle \geq 0$
- $\forall u \in V: \quad \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \underline{0}$

Komplexes Skalarprodukt **D** [1, 1.102] (Hermitesche Bilinearform) $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

- $\forall u,v,w \in V, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}: \quad \langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \overline{\lambda} \langle u,v\rangle + \overline{\mu} \langle u,w\rangle$
- $\forall u,v,w \in V, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}: \quad \langle \lambda v + \mu w, u\rangle = \lambda\overline{\langle v,u\rangle} + \mu \langle w,u\rangle$
- $\forall u,v \in V: \quad \langle u,v\rangle = \overline{\langle u,v\rangle}$
- $\forall u \in V: \quad \langle u,u\rangle \geq 0$
- $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Euklidischer Raum **D** [1, 1.71] Vektorraum und Skalarprodukt

Skalarprodukt als Matrix **S** [1, 1.74] $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer VR, $B = \{u_1,...,u_n\}$ Basis von V.

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \cdots & \langle u_1,u_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n,u_1\rangle & \cdots & \langle u_n,u_n\rangle \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Induzierte Norm **D** [1, 1.72] Euklidischer Raum $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{3.28}$$

Norm **S** [1, 1.78] V normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit:

- $\forall u \in V: \quad \| u \| \geq 0$
- $\| u \| = 0 \Rightarrow u = 0$
- $\forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \| \lambda u \| = |\lambda| \cdot \| u \|$
- $\forall u,v \in V: \quad \| u+v \| \leq \| u \| + \| v \|$ (Dreicksungleichung)

Supremumsnorm **D** [1, 1.78] $\| (x_1,...,x_n) \|_\infty := \max\{|x_i| \quad |i = 1,...,n\}$

Supremumsnorm **D** [3, 2.1020] $m,n \in \mathbb{N}, \quad G \subset \mathbb{R}^m$

$$C_b^0(G) := \{f \mid f \in C^0(G), \quad \sup|f(x)| < \infty\}$$
$$\| f \|_\infty := \sup|f(x)| \quad \forall f \in C_b^0(G)$$

gleichmäßige Konvergenz **D** [3, 2.1020] $m \in \mathbb{N}, \quad G \subset \mathbb{R}^m,$ Folge $\{f_n\} \in C_b^0(G), \quad f \in C_b^0(G)$ $\{f_n\}$ auf G gleichmäïg konvergent gegen $f \Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0 \tag{3.29}$$

Cauchy-Schwarzsche Ugleichung **S** [1, 1.72]

$$\forall u,v \in V \text{und linear unabhängig}: \quad |\langle u,v\rangle| \leq \| u \| \cdot \| v \| \tag{3.30}$$

Metrik **D** [1, 1.79] M nichtleere Menge. $\mathrm{d} : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit:

- $\forall x,y \in M: \quad \mathrm{d}(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x,y \in M : \mathrm{d}(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x,y,z \in M : \mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$

(M,d) heißt metrischer Raum

Orthonomalsystem **D** [1, 1.81] (V,g) euklidischer Vektorraum, $dimV = n$. $\{u_1,...,u_k\}$ heißt orthonormal wenn:

$$\forall i,j = 1,...,n: \quad \langle u_i,u_j\rangle = \delta_{ij} \tag{3.31}$$

Metrik und Norm **S** Metrik $\underset{\text{bedingt}}{\overset{\text{generell}}{\rightleftharpoons}}$ Norm

Gram-Erhard-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren **S** [1, 1.82] $(a_1,...,a_n)$ linear unabhängiges n-Tupel von Vektoren in euklidischen Vektorraum V.

$$b_1 = \frac{a_1}{\| a_1 \|}$$
$$b_{k+1} = \frac{a_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle a_{k+1}, b_i\rangle\, b_i}{\| \cdots \|}$$

für $k = 1,...,n-1$ eines bereits bestehenden Orthonormalsystems $(b_1,...,b_n)$

Kreuzprodukt **D** [1, 1.87] $x,y \in \mathbb{R}^3$

$$x \times y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \tag{3.32}$$

orthogonale Matrix **D** [1, 1.93] $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$AA^T = E$$
$$A^{-1} = A^T$$

Unitäre Matrix **D** [1, 1.103] Sei $(a_1,...,a_n)$ Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$

$$\overline{A}^T A = E$$
$$A^{-1} = \overline{A}^T$$

3.6 Eigenwerte und Bilinearformen

Eigenwert **D** -vektor [1, 1.239] V Vektorraum, $f \in \hom : V \longrightarrow V$. λ heißt Eigenwert von f, wenn $\exists u \in V\backslash\{0\}$, und

$$f(u) = \lambda u \tag{3.33}$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, wenn

$$f(v) = \lambda v \tag{3.34}$$

Eigenräume **D** [4, 199] Ist λ Eigenwert zu f, so ist der Untervektorraum E_λ

$$E_\lambda := \ker(f - \lambda E) \tag{3.35}$$

Eigenwerte **S** [1, 1.240] $\lambda \in V$ ist Eigenwert der quadratischen Matrix, wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{3.36}$$

Beweis

- $\exists x \in \mathrm{img}(A)$ mit $x \neq 0$
- $\exists x \in \mathrm{img}(A - \lambda I)$ mit $x \neq 0$ für $(A - \lambda I)x = 0$
- $\{0\} \subset_{\neq} \ker(A - \lambda I)$
- $A - \lambda I$ nicht invertierbar wenn $\det(A - \lambda I) = 0$
- daher das charakteristische Polynom
- $(A - \lambda E)\underline{x} = 0$ hat von Null verschiedene Lösungen, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$.

Charakteristisches Polynom **D** [1, 1.242] $f : V \in \hom \longrightarrow V$ $P(t) := \det(f - t \cdot E)$ basis unabhängig

Fundamentalsatz der Algebra **S** [4, 204] Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$, d.h. jede $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle. Es gilt: $n \geq 1, c_0, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$, sowie

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0 \tag{3.37}$$

oder es gibt ein Polymon n-ten Grades, $n \geq 1$. Dann $\exists b_n, a_j \in \mathbb{C}, \quad \forall j = 1, ..., n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ mit

$$P(z) = b_n \prod_{j=1}^{n} (z - a_j) \tag{3.38}$$

Multiplikationssatz für Determinanten **S** [1, 1.241] $A, B \in (n \times n, \mathbb{R})$.

$$\det(AB) = \det A \det B \tag{3.39}$$

Eindeutigkeit der Eigenwerte bei verschiedenen Basen **S** [1, 1.242] Die Determinante hängt nicht von der Wahl einer Basis ab. Sei S invertierbare (n, n)-Matrix. $A^* = SAS^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det A^* &= \det S \det A \det S^{-1} \\ &= \det A \det S \det S^{-1} \\ &= \det A \det E \\ &= \det A \end{aligned}$$

Vielfachheit **D** [1, 1.244] A ist (n, n)-Matrix.

- **Geometrisch** $r_g := \dim E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda E)$
- **Algebraisch** maximale Potenz von $(t - \lambda)$

3.7 Hauptachsentransformation

selbtadjungierter Operator **D** [1, 1.249] $f \in \hom : V \longrightarrow V$, f ist selbstadjungiert, wenn $\forall u, v \in V$

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle \tag{3.40}$$

Senkrechter Raum **S** [4, 213] v ist Eigenvektor des selbstadjungierten Operators $f : V \longrightarrow V$. Unterraum

$$W := \{w \in V | w \perp v\} \tag{3.41}$$

ist invariant unter f.

Beweis $f(W) \subset W$, $\langle w, y \rangle = 0 \longrightarrow \langle f(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = 0$

Matrix und Skalarprodukt **S** [4, 215] $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer Vektorraum, ONB v_i von V, $f : V \longrightarrow V$ Endomorphismus, Matrix A gegeben durch

$$a_{ij} = \langle v_i, f(v_i) \rangle \tag{3.42}$$

f ist genau dann selbstadjungiert, wenn A bezüglich v_i symmetrisch ist.

Beweis $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, f(v_j) \rangle v_i$

symmetrische Matrix **D** [1, 1.245] $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$.

selbstadjungierte Matrix **D** [1, 1.246] $A \in (n \times n, \mathbb{C})$ heißt selbstadjungiert, wenn $A^T = \overline{A}$

Eigenschaften selbstadjungierter Matrizen **S** [1, 1.246]

Relle Eigenwerte λ Eigenwert von A, $u \neq 0$ Eigenvektor zu A.

Beweis

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, \overline{u} \rangle &= \langle \lambda u, \overline{u} \rangle = \langle Au, \overline{u} \rangle \\ &= \langle u\overline{A}, u \rangle = \langle u, \overline{Au} \rangle \\ &= \langle u, \overline{\lambda u} \rangle = \overline{\lambda} \langle u, \overline{u} \rangle \end{aligned}$$

Eigenvektoren zweier Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A, u Eigenvektor von λ, v Eigenvektor von μ, $\Longrightarrow u \perp v$

Beweis

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle \\ &= \langle u\overline{A}, \overline{v} \rangle = \langle u, \overline{Av} \rangle \\ &= \langle u, \overline{\mu v} \rangle = \mu \langle u, \overline{v} \rangle \\ &= \mu \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

wegen $\lambda \neq \mu \Longrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$.

Hauptachsentransformation **S** [4, 221] $A \in (n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow P \in O(n)$

- charakterischtische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ mit Nullstellen λ_i
- $\forall k = 1, ..., r$ Basis $w_1, ..., w_n$ des Eigenraums $E_{\lambda,k}$ bestimmen. Methode: Lösen des Gleichungssystem $(A - \lambda_k E)x = 0$
- $w_1, ..., w_n$ orthonormalisieren zu $v_1, ..., v_n$
- $$\begin{aligned} (v_1, ..., v_n) &:= (v_1, ..., n_{n,1}, ..., v_1, ..., v_{n,r}) \\ P &:= (\underline{v_1} \cdots \underline{v_n}) \end{aligned}$$

Spektrum **D** [1, 2.149] Menge aller Eigenwerte einer linearen Abbildung $f : V \longrightarrow V$

Spektrumsatz **S** $n \in \mathbb{N}, \quad A \in M_{\mathbb{K}}^{n \times n}$

1. $$\begin{aligned} \sigma(A) : &= \{z \mid z \in \mathbb{C}, \quad A - zI \text{ nicht integrierbar}\} \\ &= \{z \mid z \in \mathbb{C}, \quad \det(A - zI) = 0\} \\ &= \{z \mid z \in \mathbb{C}, \quad z \text{ Eigenwert von } A\} \end{aligned}$$

   heißt Spektrum von A. $\mathbb{C} \backslash \sigma(A)$ die Resolventenmenge.

2. Resolventenmenge

$$R(A, z) := (A - zI)^{-1} \tag{3.43}$$

Projektor **D** [3, 1.537] V linearer Raum, $P \in L(V,V)$
orthogonaler Projektor $P \Longleftrightarrow$
$P^2 = P$ (Idempotenz)
$P = P^*$ (Symmetrie)

Spektralsatz **S** [1, 2.149] Banach-Raum $(V, \| \cdot \|)$, $f \in \hom : V \longrightarrow V$ ist kompakt. Dann existiert der nichtverschwindende Teil des Spektrums von f aus abzählbar vielen Elemeten mit 0 als einzig möglichen Häufungspunkt.

Spektralsatz eines Hilbert-Raums **S** [1, 1.150] komplexer Hilbert-Raum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $f : V \longrightarrow V$ selbstadjungiert Operator, kein Nulloperator.

- Spektrum reel
- Normierung $\{\lambda_j | j \in J\}$ der nicht verschwindenden Eigenwerte von f
- Orthonormalsystem $\{u_j | j \in J\}$ von V, daß $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = 0$
- $\forall u \in V$ gibt es Bild $f(u) = \sum\limits_{j \in J} \lambda_j \langle u, u_j\rangle u_j$

Spektralsatz für endlichdimensionalen Raum **S** [3, 1.539] V linearer Raum mit $\dim V < \infty$, $T \in L(V,V)$ symmetrisch, λ_i paarweise verschiedene Eigenwerte von T, dann gilt für den Projektor P_j des Eigenraums zu λ_j also $\ker(T - \lambda_j I)$, wobei n_j der k Vielfachheiten

1. $\sum\limits_{j=1}^{k} P_j = I$
2. $P_i P_j = P_j P_i = \delta_{ij} P_i$
3. $T = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$

Orthogonaler Raum und Teilraum **S** [3, 1.380] V linearer Raum, $U \subset V$, $M \subset V$

1. $M^\perp := \{u \mid u \in V, \quad \forall x \in M : \quad \langle u, x\rangle = 0\} \subset M$ und heißt Orthogonalraum von U
2. $M^\perp := (\text{span} M)^\perp$
3. $\text{span} M \cap M^\perp = \{0\}$
4. $M^{\perp\perp} = \text{span} M$
5. $V = U \oplus U^\perp, \quad \dim V = \dim U + \dim U^\perp$

3.8 Hilbert-Räume

Prä-Hilbert-Raum **D** [1, 2.117] Vektorraum V über $\mathbb{F}$ mit komplexen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ heißt Skalarprodukt.

Hilbert-Raum **D** [1, 2.118] Ein Prä-Hilbert-Raum heißt Hilbert-Raum, wenn er mit der induziertem Norm ein Banach-Raum ist.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung **S** [1, 2.119] $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist Prä-Hilbert-Raum.

$$\forall u, v \in V : \quad |\langle u, v\rangle| \le \| u \| \cdot \| v \| \tag{3.44}$$

Schauder-Basis **D** [1, 2.120] ist eine Basis $B := \{u_j | j \in \mathbb{N}\}$ im unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum, wenn $\forall u \in V$ gibt es eine Folge $\lambda_j \in \mathbf{F}$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j u_j &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j u_j = u, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j u_j &= 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Das Orthonormalsystem heißt vollständiges Orthogonalsystem.

4 Funktionenanalysis

4.1 holomorphe Funktion

Möbius-Transformation **D** [3, 2.915] (oder auch gebrochen rationale Abbildung) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d} \tag{4.1}$$

$z \in \mathbb{C} \backslash \{-\frac{c}{d}\}$ wenn $c \neq 0$
$z \in \mathbb{C}$ wenn $c = 0$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen **D** [1, 2.72] $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned}$$

harmonische Funktion **S** [1, 2.78] $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Die reellen Funktionen u, v sind harmonisch.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \\ \nabla^2 v &= 0 \end{aligned}$$

Beweis Cauchy-Riemann-DGL erneut nach x, y differentieren.

$$\begin{aligned} u_{xx} = v_{xy}, \quad v_{xy} = u_{yy} \\ u_{yx} = v_{yy}, \quad v_{xx} = u_{xy} \end{aligned}$$

ergibt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Beweis Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist wie Multiplikation mit einer Matrix zur Wahl einer Basis (a, b)

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

Konformität **S** [1, 2.79] $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytische Funktion, $z \in D, f'(z) \neq 0$. Dann ist f konform. Zwei reguläre Kurven c_1 und c_2 treffen sich unter Winkel α, so sind $f \circ c_1$ und $f \circ c_2$ in Umgebung $f(z)$ auch regulär.

Komplexe Integration **D** [1, 2.80] $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, c :]a, b[\longrightarrow D$ stetig diffbare Kurve.

$$\begin{aligned} \int_c f(z) \mathrm{d}z &:= \int_a^b f(c(t)) c'(t) \mathrm{d}t \\ &:= \int_a^b \mathrm{Re} f(c(t)) c'(t) \mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{img}\, f(c(t)) c'(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Integralsatz von Cauchy **S** [1, 2.83] $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, c eine geschlossene stckweise stetig diffbare Kurve in D, die einen zusammenhängenden Bereich berandet.

$$\oint_c f(z) \mathrm{d}z := \int_c f(z) \mathrm{d}z = 0 \tag{4.2}$$

Integralformel von Cauchy **S** [1, 2.84] $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, c stückweise stetig diffbare Kurve in D, die einen einfach zusammenhängenden Bereich $G \subset D$ berandet, z_0 ein innerer Punkt von G.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \\ f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \mathrm{d}z \end{aligned}$$

,wobei c das z mit positiver Orientierung einmal umläuft.

Residuensatz **S** [3, 2.929] f bis auf z holomorph

$$\int\limits_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{z_j} f \tag{4.3}$$

Erweiterung der Cauchyschen Integralformel **S** [1, 2.86] wie Integralformel von Cauchy,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{4.4}$$

Mittelwertsatz **S** [1, 2.89] $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $r > 0$, daß abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 vom Radius r in D liegt.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

Satz von Liouville **S** [1, 2.91] $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists M > 0 : \quad |f(z)| \leq M \Rightarrow f$ konstant.

4.2 Reihendarstellung und Singularitäten

Laurentreihe **D** [1, 2.98] $f : D \subset^o \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, für $0 < r_1 < r_2$ ist abgeschlossene Ringgebiet $R = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset D$ enthalten.

$$L(x) := \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i(x)}_{A} + \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{-1} a_i(z-z_0)^{-i}(x)}_{H} \tag{4.6}$$

$A(x)$ analytischer Teil (Nebenteil)
$H(x)$ Hauptteil

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{|c-z_0|=r} \frac{f(c)}{(c-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}c = \frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0) \tag{4.7}$$

Residuum **D** [1, 2.98] $L(x, z_0) = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$

$$Res_{z_0}f := a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{c(z_0)} f(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.8}$$

Anwendung des Residuums **S** [3, 2.948] $z_0 \in \mathbb{C}, \quad r_0 > 0, \quad f$ holomorph in $\{z \mid z \in \mathbb{C}, \quad 0 < |z - z_0| < r_0\}, \quad n \in \mathbb{N}$

1. z_0 Pol n-ter Ordnung, für $k \leq n$ oder hebbar
   $g(z) := (z-z_0)^n f(z)$ hat bei z_0 hebbare Singularität und
   $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ existiert
2. z_0 Pol 1. Ordnung
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \tag{4.9}$$
3. falls z_0 Pol k-ter Ordnung mit $k \leq n$
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z) \tag{4.10}$$
4. grad$p \geq$ grad$q + 2, \quad p \neq 0$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q(x)}{p(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im z_j > 0}\mathrm{Res}(\frac{q}{p}, z_j) \tag{4.11}$$
   Beweis Halbscheine über Im-Re-Diagramm, die alles Singularitäten mit $\Im > 0$ erfaßt. Zwei Wegintegrale definieren, beim Rundintegral den Radius gegen unendlich setzen und somit null erhalten. Der Rest ist die Summe üner Residuen.
5. $\mathrm{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Arten der Singularitäten **D** [1, 2.98] [3, 2.944]

- **hebbar**
  Hauptteil verschwindet, $a_k = 0 \quad k < 0$, Funktion kann analytisch forgesetzt werden

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ... \\ a_k &= \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 0 & k \geq, k \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{(k+1)!} & k \geq 0, k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

- **Polstelle**
  z_0 n-ter Ordnung
  $\forall m < n, n < 0 : \quad a_n \neq 0, a_m = 0$
  $f(z) = e^{1/z}$
  oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2}\cos z &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{4!} + ...\right) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - ... \\ a_k &= \begin{cases} 0 & k < -2 \\ 0 & k \geq -2, k \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{(\frac{k}{2}+1)}}{(k+2)!} & k \geq -2, k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

- **wesentliche**
  $\{a_i = 0 | i < 0\}$ hat undendlich viele Elemente

$$\begin{aligned} \exp\frac{1}{z} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 - ... \\ a_k &= \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \frac{1}{(-k)!} & k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5 Differentialgleichungen

5.1 Existenz- und Eindeutigkeit

Lipschitz-Bedingung **D** [5, 102] $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n, \exists L \geq 0,$
$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G$

$$\parallel f(x, y_1) - f(x, y_2) \parallel \leq L \parallel y_1 - y_2 \parallel \tag{5.1}$$

DGL und Lipschitz **S** [5, 102] $G \subset^o \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und bezüglich $y = (y_1, ..., y_n)$ stetig partiell diffbar.
$\Rightarrow f$ genügt Lipschitzbedingung.

Eindeutigkeitssatz **S** [5, 102] $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die stetig diffbar und lokal Lipschitz. $\phi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$ im Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in I : \quad \phi(x_0) &= \psi(x_0) \\ \forall x \in I : \quad \phi(x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

Existenzsatz von Picard-Lindelöf **S** [5, 105] $G \subset^o \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$, lokal-lipschitz.
$\forall (a, c) \in G \quad \exists \varepsilon > 0$ und $\exists$ Lösung

$$\phi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

der DGL $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedigung $\phi(a) = c$.

Existenzsatz von Picard-Lindelöf **S** $J \subset \mathbb{R}, t_0 \in J, F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, es gilt Lipschitzbedingung. $\forall x_0 \exists f$
x_0 Anfangswertproblem,
$f : J \times \mathbb{R}^n$ stetig differentierbar

$$\begin{aligned} f'(t) &= F(t, f(t)) \\ f(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Maximal forgesetzte Lösung **D** $y(\cdot)$ ist maximal forgesetzt Lösung zu $y' = f(x, y)$, wenn für alles Lösungen $z(\cdot)$ gilt

$$y(\cdot) \subset z(\cdot) \Longrightarrow z(\cdot) = y(\cdot) \tag{5.3}$$

5.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

System von n DGL 1. Ordnung **D** [5, 98] $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$y' = f(x, y)$ heißt System mit Lösung $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- ϕ in G enthalten
- $\forall x \in I : \quad \phi'(x) = f(x, \phi(x))$
- $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$
- $\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' &=& f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' &=& f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \vdots && \\ y_n' &=& f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{array} \right\}$

System von n DGL 1. Ordnung **D** [5, 99] $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,
$y^(n) = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$
mit Lösung $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- Menge $\{(x, y_0, ..., y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n : \quad y_i = \phi^{(i)}(x), 0 \leq i \leq n - 1\}$ in G enthalten
- $\forall x \in I : \quad \phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n-1)}(x))$

Reduktion der Ordnung **S** [5, 104] $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

$$\text{DGL}n\text{ter Ordnung} \quad \underset{\substack{\text{Entkoppeln} \\ \text{nicht immer}}}{\overset{\text{Reduktion}}{\rightleftharpoons}} \quad n \text{ DGL 1. Ordnung}$$

Die DGL $n$ter Ordnung
$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(b)$
kann durch $y_k := y^{(k-1)} \quad \forall k = 1, ..., n$

in n DGL 1.Ordnung umgewandelt werden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \\ \underline{y}' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Picard-Lindelöfsches Interatiosnverfahren **S** [5, 105] $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ in DGL $y' = f(x, y)$ mit AW $\phi(a) = c, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= c + \int_a^x f(t, \phi(t))\mathrm{d}t \\ \phi_{k+1}(x) &= c + \int_a^x f(t, \phi_k(t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Getrennte Variablen **D** [5, 111] $I, J \subset^o \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in C^0$,
$\forall y \in J, \quad g(y) \neq 0$

$$y' = f(x)g(y) \tag{5.4}$$

Getrennte Variablen **S** [5, 111] $(x_0, y_0) \in I \times J$
$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t \qquad G(y) := \int_{y_0}^y = \frac{1}{g(t)}\mathrm{d}t$
$H \in I, \quad x_0 \in I, \quad F(H) \subset G(J)$
dann $\exists$ Lösung $\phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ der DGL $y' = f(x)g(y)$ mit

- $\phi(x_0) = y_0$
- $\forall x \in H : \quad G(\phi(x)) = F(x)$
- $\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + c$
- $y(x) = G^{-1} \circ F(x) \qquad \forall x \in D(y(\cdot))$

Lineare DGL **D** [5, 114] $I \subset \mathbb{R}, \quad a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{5.5}$$

ist linerare DGL 1.Ordnung, wobei $b = 0$ homogen, $b \neq 0$ inhomogen

Lösung linearer DGL **S** [6, 4] zu DGL $y' = f(x)y + g(y)$ existiert

- $y_H = \exp \int f(x)\mathrm{d}x$
- $y_P = y_H(x) \int \frac{g(x)}{y_H(x)}\mathrm{d}x$
- $y_A = C_n y(x) + y_P(x)$

Homogene Lösung linearer DGL **S** [5, 114] $x_0 \in I, \quad c \in \mathbb{R}, y' = a(x)y$ dann $\exists$ Lösung $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(x_0) = c$ mit

$$\phi(x) = c \exp \int_{x_0}^x a(t)\mathrm{d}t \tag{5.6}$$

$\forall x_0 \in I$ sind Vektoren $\phi_1(x_0), ..., \phi_k(x_0)$ linear unabhängig

Inhomogene Lösung linearer DGL **S** [5, 116] $I \subset \mathbb{R}, \quad a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, dann $\forall x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Lösung $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der DGL $y' = a(x)y + b(x)$ mit der Anfangsbedigung $\psi(x_0) = c$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right) \\ \psi(x) &= \phi(x)\left(c + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\phi(t)}\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Lösungs-Fundamentalsystem **D** [5, 126] $y' = A(x)y$ ist Basis $(\phi_1, ..., \phi_n)$

$\phi_i = \begin{pmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{pmatrix} \qquad \forall i = 1, ..., n$

$\Phi := \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi n1 & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix}.$

Lösungen $\phi_1, ..., \phi_n$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \det \Phi \neq 0$

Ferner gilt: $\phi = \Phi c, \quad \Phi' = A\Phi$

Inhomogenes Lösungs-Fundamentalsystem **D** [5, 127] Symbole wie homogene,

$L_I =$ Menge aller Lösungen $\psi : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$ von $y' = A(x)y + b(x)$.

Dann für beliebiges $\psi_0 \in L_I$

$$L_I = \psi_0 + L_H \tag{5.7}$$

Allgemeine Lösung aus spezieller und homogener Lösung

DGL $n$ter Ordnung **D** $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

$a_k : I \longrightarrow \mathbb{C}, \quad 0 \leq K \leq n-1$ stetige Funktion

$W(x) := \det \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

$W(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ homogene Lösung linear unabhängig

Polynome der Differentialoperatoren **D** [5, 139] $P(D)f := a_0 f + a_1 Df + ... + a_n D^n f$

D-Polynome **S** [5, 141] $\forall P() \in \mathbb{C}[T], \quad \lambda \in \mathbb{C} : \qquad P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$

D-Polynome **S** [5, 141] $P(T) = T^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^i + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ hat

n paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$.

$$\phi_k(x) := e^{\lambda_k x} \qquad k = 1, ..., n \tag{5.8}$$

bildet Fundamentalsystem der DGL $P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$

System linearer DGL **D** [1, 2.168] $\forall i, j = 1, ..., n : \quad a_{ij} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen zu $n \times n$-Matrix. $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\underline{f}(x, \underline{y}) = A(x)\underline{y} + \underline{h}(x) \tag{5.9}$$

$h(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist n-Tupel reellwertiger Funktionen. System ist linear. $h = 0 \Leftrightarrow$ homogen.

Wronski-Determinaten **S** [1, 2.172] Jedem System $\underline{Y}_1, ..., \underline{Y}_n$ von Lösung von $\underline{y}' = A(x)\underline{y}$ von lineareden DGL 1. Ordnung läßt sich Wronski-Determinanten $W : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ finden

$$W(x) := \det(\underline{Y}_1(x), ..., \underline{Y}_n(x)) \tag{5.10}$$

N Dgl mit konst. Koeffizienten 179

Jordan Normalform **D** [1, 2.182] zu jeder komplexen Matrix $(n \times n)$-Matrix A existiert invertierbar Matrix S

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

,wobei die Untermatrizen Jordanmatrizen J_i sind, die ein lineaeres homogenes System von DGL sind.

5.3 Beispiele

$y' = 2xy$	Picard-Lindelöf-Interation	$\phi(x) = c\sum\limits_{k=0}^{i} nfty\frac{x^{2k}}{k!} = ce^{x^2}$
$y'' + y = 0$	$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x$	$\phi(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x$
$y' = \frac{a}{x}y$		$y = cx^a$
$y' = \frac{x^2}{y^3}$	$\begin{aligned} f &= x^2 \\ g &= \frac{1}{y^3} \end{aligned}$ $\int y^3 \mathrm{d}y = \int x^2 \mathrm{d}x + c$	$\frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + c$
$y' = y^2, \phi(0) = c$	getrennte Variablen $\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ g(y) &= y^2 \\ F(x) &= \sin_0^x \mathrm{d}t = x \\ G(y) &= \int\limits_0^y \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= -\frac{1}{t}\,\vert_0^y \\ &= \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \\ x &= \frac{1}{c} - \frac{1}{\phi(x)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} c = 0 \quad \phi(x) &= 0 \\ c > 0 \quad \phi(x) &= \frac{c}{1-cx}, \quad x < \frac{1}{c} \\ c < 0 \quad \phi(x) &= \frac{c}{1-cx}, \quad x > \frac{1}{c} \end{aligned}$
$y' = \frac{x}{y} = \underbrace{\frac{1}{y}}_{g}\underbrace{x}_{f}$	getrennte Variablen $\begin{aligned} G(y) &= \int\limits_{y_0}^{y} y\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}y^2 \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ F(x) &= \int\limits_{x_0}^{x} x(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}x^2 \\ G^{-1}(y) &= \sqrt{2t} \quad t > 0 \\ y(x) &= G^{-1} \circ (F + C)(x) \\ &= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)}(x) \\ &= \sqrt{x^2 + 2C} \end{aligned}$	$y(x) = \sqrt{x^2 + C}$

$x^2y + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$	Reduktion der Bessel-DGL auf 1. Ordnung $y'' = \frac{1}{x}y'' + (1 - \frac{m^2}{x^2})y = 0$ $y_1 = y, \quad y_2 = y'$ $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{m^2}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} y$	
$y' = kx, \quad \phi(x_0) = c$		$\phi(x) = ce^{k(x-x_0)}$
$y' = 2xy + x^3$ lineare DGL	$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(x) + \phi_P(x) \\ &= x^{x^2}\left(c + \int\limits_0^x t^3 e^{-t^2}\right) \end{aligned}$ partielle Intergration $\begin{aligned} s &= t^2 \int\limits_0^x t^3 e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \phi(x) &= ce^{x^2} \\ \psi(x) &= (c + \frac{1}{2})e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1) \end{aligned}$
$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ \lambda_{1/2} &= 1; 4 \end{aligned}$ $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \underline{y}_1 &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underline{y}_2 &= e^{4x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$

$x''=-kx$	$\begin{aligned} x(t_0) &= 0 \\ \cot x(t_0) &= v_0 \\ E &= \frac{1}{2}\dot{x}(t_0)^2+U(x(t_0)) \\ &= \frac{1}{2}v_0^2 \\ G(x) &= \frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{k}}{v_0}\right) \\ t-t_0 &= \frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\left(\frac{x(t)\sqrt{k}}{v_0}\right) \end{aligned}$	$x(t)=\frac{v_0}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}(t-t_0)$
$\left\{\begin{array}{c} y_1'=-\omega y_2 \\ y_2'=\omega y_1 \end{array}\right\}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$	$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \cos\omega x & -\sin\omega x \\ \underbrace{\sin\omega x}_{\phi_1} & \underbrace{\cos\omega x}_{\phi_2} \end{pmatrix}$
$\left\{\begin{array}{c} y_1'=-y_2 \\ y_2'=y_1+x \end{array}\right\}$	$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ \frac{b(x)}{\Phi(x)} &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$ partielle Integration $u(x)=\int\limits_0^x \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix}\mathrm{d}t+c$ partielle Integration	$\phi(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$
$y''=\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{2x^2}y=0$ für $\mathbb{R}^+$	$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x \\ \phi_2(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$	$\phi(x)=c_1x+c_2\sqrt{x}$
Legendre $\|x\|<1$ $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$		$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(c^{-x^2}\right)^{(n)}$
Hermitesche $y''=2xy'+2ny$		$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$
Lagguerresche $x>0$ $xy''-(1-x)y'+ny=0$		$L_n(x)=e^x\left(x^n e^{-x}\right)^{(n)}$
$y'''-y''-2y=0$	$\begin{aligned} P(D) &= D^3-D^2-2D \\ \lambda_{1,2,3} &= 0,-1,2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 \\ \phi_2(x) &= e^{-x} \\ \phi_3(x) &= e^{2x} \end{aligned}$

$y''=\omega^2 y$	$\begin{aligned} P(D) &= D^2+\omega^2 \\ \lambda &= \pm\mathrm{i}\omega \end{aligned}$	$\begin{aligned} \phi_1(x) &= e^{\mathrm{i}\omega x} \\ \phi_2(x) &= e^{-\mathrm{i}\omega x} \\ \psi_1(x) &= \cos\omega x \\ \psi_2(x) &= \sin\omega x \end{aligned}$
$y^{(4)}+8y''+16=0$	$P(D) = D^4+8D^2+16$ $(T-2\mathrm{i})^2(T+2\mathrm{i})^2$ $\begin{aligned} \phi_{10} &= e^{2\mathrm{i}x} \\ \phi_{11} &= xe^{2\mathrm{i}x} \\ \phi_{20} &= e^{-2\mathrm{i}x} \\ \phi_{21} &= xe^{-2\mathrm{i}x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \psi_{10} &= \cos 2x \\ \psi_{11} &= x\cos 2x \\ \psi_{20} &= \sin 2x \\ \psi_{21} &= x\sin 2x \end{aligned}$
$x''+2Mx'+\Omega^2x=0$ wobei $M,\Omega\in\mathbb{R}^+$	$\begin{aligned} P(D) &= D^2+2MD+\Omega^2 \\ \lambda &= -M\pm\sqrt{M^2-\Omega^2} \\ \omega &:= \sqrt{\Omega^2-M^2} \end{aligned}$ $0<M<\Omega$ $M = \Omega$ $\lambda_{1/2}=-M\pm\sqrt{M^2-\Omega^2}$ $M_j = -\lambda_j>0$ $M>\Omega$	$\begin{aligned} \phi_1(t) &= e^{-Mt}e^{\mathrm{i}\omega t} \\ \phi_2(t) &= e^{-Mt}e^{\mathrm{i}\omega t} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \phi_1(t) &= e^{-Mt} \\ \phi_2 t &= te^{-Mt} \end{aligned}$ $\forall i=1,2$ $\begin{aligned} \phi_1(t) &= e^{-M_1t} \\ \phi_2(t) &= e^{-M_2t} \end{aligned}$

5.4 Wellengleichungen

Typen der partieller DGL D

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\text{ niedrige Ableitungen}\right)u=0 \quad \forall x\in G \tag{5.12}$$

1. **Elliptisch**
   alle a_i eines Vorzeichens

$$\Delta u=0 \qquad \text{(Potentialgleichung)}$$

2. **Hyperbolisch**
   alle a_i eines Vorzeichens, bis auf eine a_i mit entgegengesetzen Vorzeichen

$$-\Delta u + \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \qquad \text{(Mehrdim. Wellengleichung)}$$

3. **Parabolisch**
   alle a_i eines Vorzeichens, bis auf ein a_i, das null ist

$$-\Delta u + \frac{1}{k} u_t = 0 \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(x)u = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} u_t \qquad \text{(Schrödinger-Gleichung)}$$

1-dim Wellengleichung S

1. [3, 2.1151]

$$\begin{aligned} -u_{xx} + \frac{1}{c^2} u_{tt} &= 0 \\ \phi, \psi &\in C^2(\mathbb{R}) \\ u(x,t) &= \phi(x-ct) + \psi(x+ct) \end{aligned}$$

2. **mit Anfangsbedingung**

$$\begin{aligned} u_0 \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1 &\in C^(\mathbb{R}) \text{(schwache Lösung)} \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_1(x,0) &= u_1(x) \\ u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-ct) + u_0(x-ct)\right) &+ \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(q)\mathrm{d}q \end{aligned}$$

3. **mit Anregung** [3, 2.1155]

$$\begin{aligned} f \in C^1(\mathbb{R}\times(0,\infty)) &\cap C^0(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \\ u : \mathbb{R}\times[0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ -u_{xx} + \frac{1}{c^2} utt &= f(x,t) \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) &= 0 \\ u(x,t) = \frac{a}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} & f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \end{aligned}$$

4. **mit Anregung mit AB**

$$\begin{aligned} u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_0''(0) = u_0''(l) = 0, \quad u_1(0) &= u_1(l) = 0 \\ u_0 \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in \mathbb{C}^(\mathbb{R}), \quad u : [0,l]\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(l,t) &= 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) &= u_1(x) \\ u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right) + \frac{1}{2c} &\int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(q)\mathrm{d}q \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Wellengleichung S

1. **Ebene Welle**

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{1}{a^2} u_{tt} &= 0 \\ \phi \in C^2(\mathbb{R}), \quad c \in \mathbb{R}^3, \quad |c| &= 1 \\ u(x,t) &:= \phi\left(\langle c, x\rangle - at\right) \\ v(x,t) &:= \phi\left(\langle c, x\rangle + at\right) \end{aligned}$$

und jede Linearkombination von ebenen Wellen

2. **Kugelwellen**

$$\begin{aligned} \phi \in C^2(\mathbb{R}), &\quad x_0 \in \mathbb{R}^3 \\ u(x,t) &= \frac{1}{|x-x_0|}\phi\left(|x-x_0| - at\right) \\ v(x,t) &= \frac{1}{|x-x_0|}\phi\left(|x-x_0| + at\right) \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{x_0\}, &\quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A Nomenklatur

$[a,b]$	abgeschlossene Menge
$]a,b[$	offene Menge
$A \subset^o B$	$A \subset B$ und A offen
$A \subset^G B$	A Gebiet in B
$A \in C^0$	A stetig
$A \in C^n$	A n-mal stetig differenzierbar
∇^2	Laplace-Operator
rg	Rang einer Abbildung
img	Bild einer Abbildung
ker	Kern einer Abbildung
$\Re$	Realteil einer $\mathbb{C}$-Zahl
$\Im$	Imaginärteil einer $\mathbb{C}$-Zahl
(a,b)	Paar von Elementen a und b
$y^{(n)}$	$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ n-te Ableitung
$\dot{x}$	x nach der Zeit ableiten
$\langle x,y\rangle$	Skalarprodukt von x und y
$\big[f(x)\big]_a^b$	bestimmtes Integral
tr	Spur
hom	Homomorphismus (lineare Abbildung)
sign	Signum
$\mathrm{Res}_a\, f(x)$	Residuum von $f(x)$ zur Polstelle a
∂M	Rand der Menge M
VR	Vektorraum
VF	Vektorfeld

Index

Literatur

[1] Karl-Eberhardt Hellwig und Bernd Wegner, *Mathematik und Theoretische Physik*, Walter Gruyter-Verlag, 1992

[2] Analysis, Barner-Flohr, Walter de Gruyter, 1996

[3] Höhere Mathematik für Physiker, Rainer Wüst, Walter de Gruyter, 1995

[4] Lineare Algebra, Klaus Jänich, Springer, 1991

[5] Analysis 2, Otto Forster, Vieweg, 5. Auflage, 1984

[6] Gelbes Rechenbuch, Peter Furlan, Verlag Martina Furlan, 1998

[7] Kurzscript Topologie und Mannigfaltigkeiten, Mike Scherfner, 2000