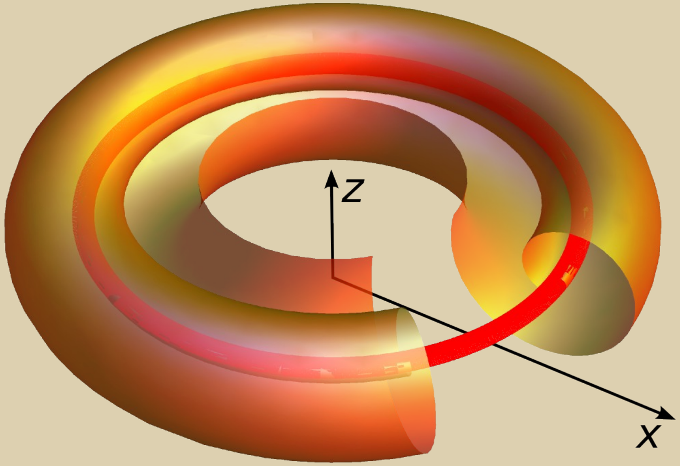
Dreidimensionale Erregungswellen in oszillatorischen Medien

Fabian Paul

Einleitung

Wechselwirkung eines Scrollrings mit einem Neumann-Rand.



$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}_i = 0$$

$$\text{mit } \boldsymbol{j}_i = -D_i \nabla c_i$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$$

- Fenton (1999) im 2V Fenton-Karma-Modell im Regime ohne Meandern
- Gast (2009) im Oregonator-Modell bei negativer Filamentspannung
- Azhand, Buchholz (laufende Arbeit) im Oregonator-Modell

Gliederung

- Hopf-Bifurkation im Reaktions-Diffusions-System
  - die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung
  - Wahl der Parameter
- Erinnerung: WW eine Spiralwelle mit einem Neumann-Rand
- Wechselwirkung eines Scrollrings mit einem Neumann-Rand
  - Charkterisierung der Dynamik
  - phänomenologische Theorie
  - geneigte Scrollringe
- Zusammenfassung und Ausblick

Hopf-Bifurkation im Reaktions-Diffusions-System

Reaktions-Diffusions-System

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c};\mu) + \underline{\underline{D}}\,\Delta\,\boldsymbol{c}$$

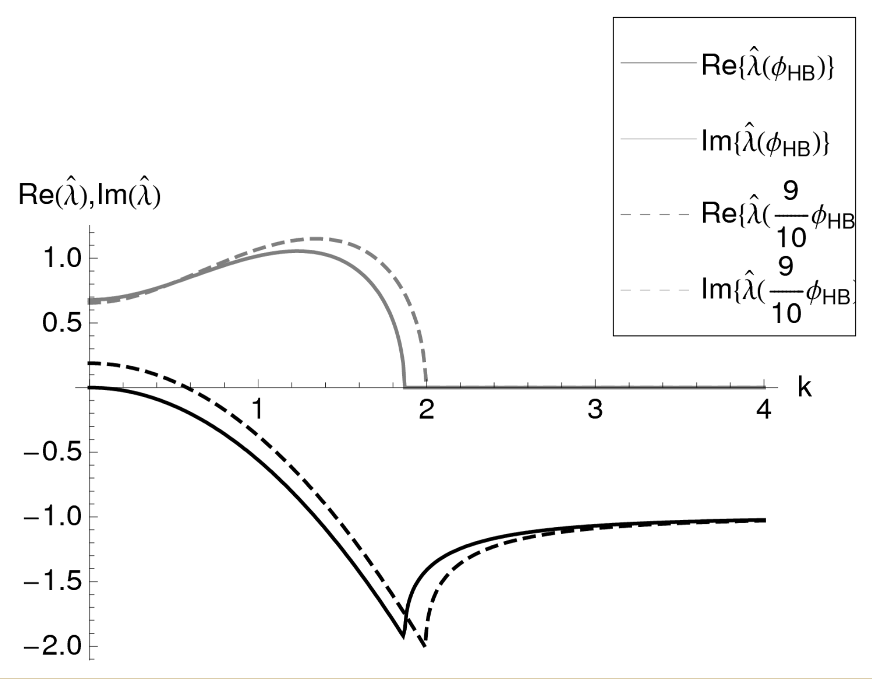
lineare Stabilitätsanalyse

$$\boldsymbol{c}_k(r,t) = \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{U}_k e^{\lambda t}\cos(kr)$$

$$\left(\underline{\underline{L}}[c_0(\mu),\mu] - \underline{\underline{D}}k^2\right)\boldsymbol{U}_k = \lambda\,\boldsymbol{U}_k$$

$$\sigma = \mathrm{Re}(\lambda) \propto k^2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma \propto \mu \\ k \propto \mu^{1/2} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_0 + \epsilon Z(\tau, s)\boldsymbol{U} e^{i\omega_0 t} + c.c. + h.o.t.$$



$$q = 2\cdot 10^{-4},\ f = 1{,}16,\ \epsilon = 0{,}0852,\ \epsilon' = 0{,}00094,$$
$$D_u = 1,\ D_w = 1{,}12,\ \Phi_{HB} = 0{,}000428$$

die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} A = A + (1 + i\alpha)\Delta A - (1 + i\beta)|A|^2 A$$

Kohärente Stukturen

- Phasendefekte in 1-D
- Spiralen in 2-D

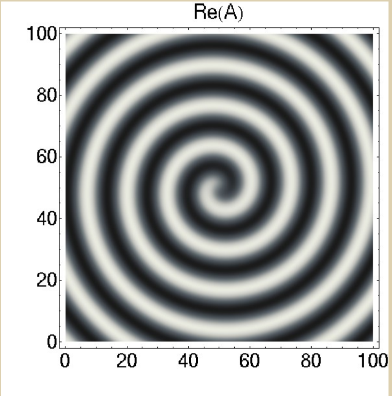
$$A(r, \theta, t) = F(r) \exp i[-\omega t \pm m\theta + \psi(r)]$$

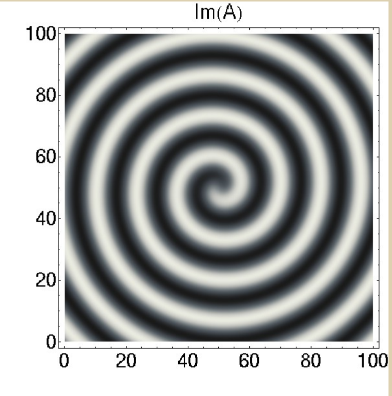
$$F \propto r, \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}r \propto r \quad \text{für } r \to 0$$
$$F \to \sqrt{1 - k^2}, \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}r \to k \quad \text{für } r \to \infty$$

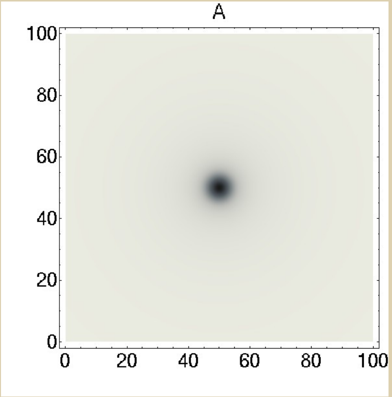
- Scrollwellen in 3-D

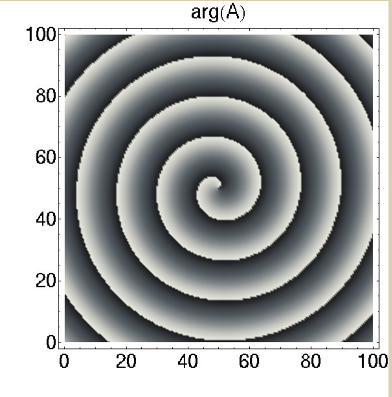
Defekte

$$\oint_C \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \pm 2\pi$$
$$A = 0$$

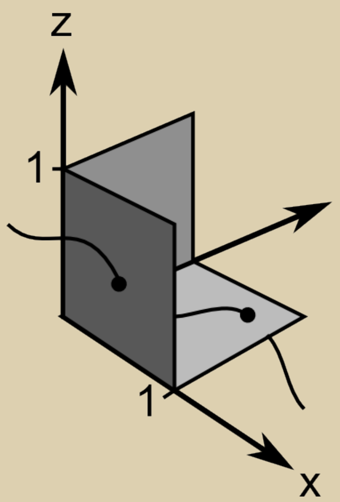


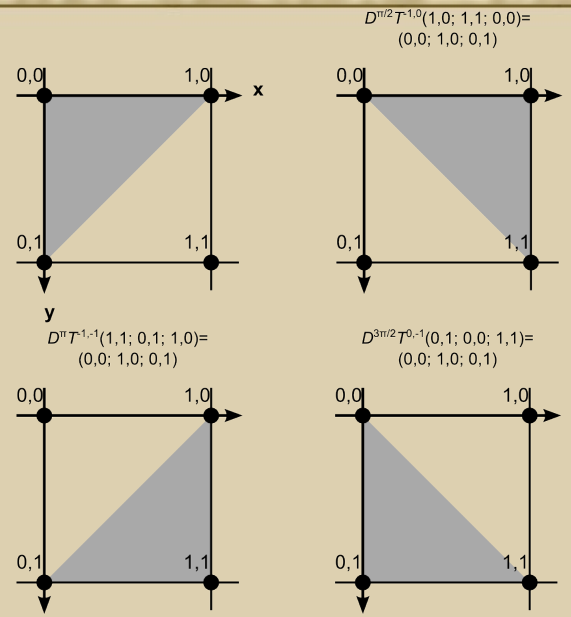


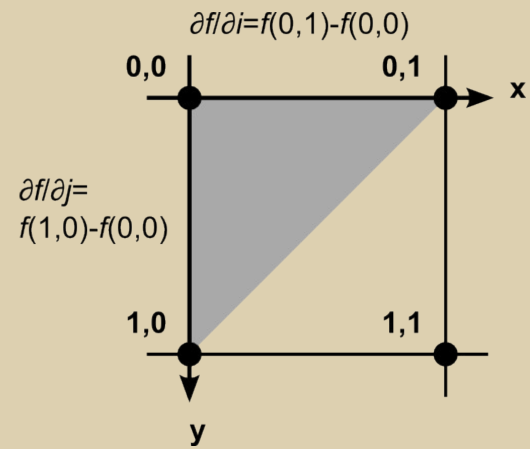




Bestimmung von Phasendefekten und Filamenten







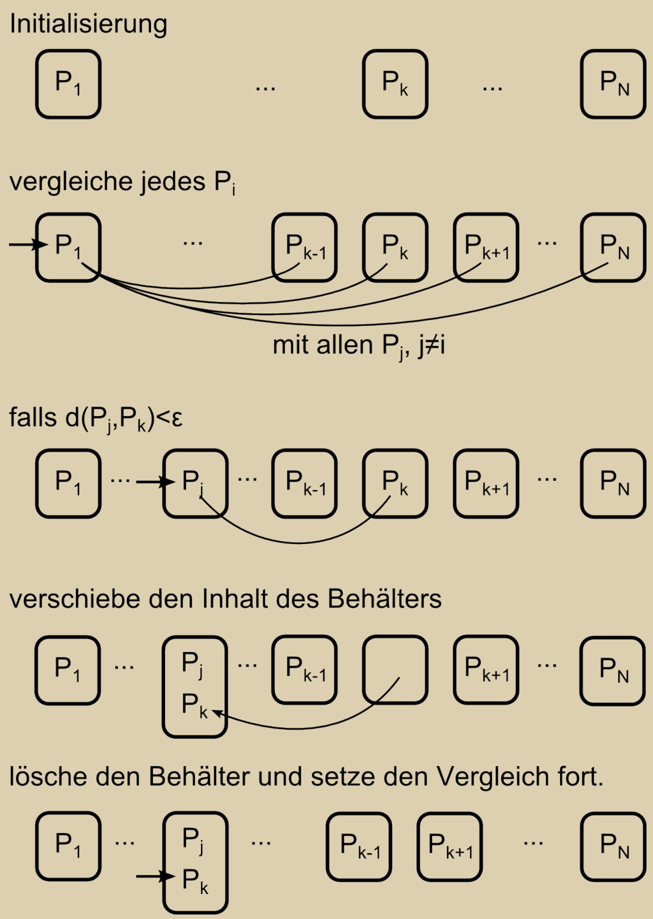
$$0=a(\Delta i,\Delta j)\approx a(0,0)+\Delta i\frac{\partial a}{\partial i}(0,0)+\Delta j\frac{\partial a}{\partial j}(0,0)$$

$$0=b(\Delta i,\Delta j)\approx b(0,0)+\Delta i\frac{\partial b}{\partial i}(0,0)+\Delta j\frac{\partial b}{\partial j}(0,0)$$

$$\begin{pmatrix}\Delta i\\ \Delta j\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\partial_i a(0,0) & \partial_j a(0,0)\\ \partial_i b(0,0) & \partial_j b(0,0)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a(0,0)\\ b(0,0)\end{pmatrix}$$

union-find-Algorithmus

- Jeder Punkt wird in einem „Behälter“ gespeichert.
- Es werden *verbundene* Behälter gesucht.
- Zwei Behälter gelten als verbunden, wenn es einen Punkt $\boldsymbol{P}_1$ aus B_1 und einen Punkt $\boldsymbol{P}_2$ aus B_2 gibt mit $d(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)=||\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2||<\varepsilon$
- Verbundene Behälter werden zusammengefasst.
- Am Ende ist in jedem Behälter ein Filament.



Wahl der Parameter

$$\frac{\partial}{\partial t} A = A + (1 + i\alpha)\Delta A - (1 + i\beta)|A|^2 A$$

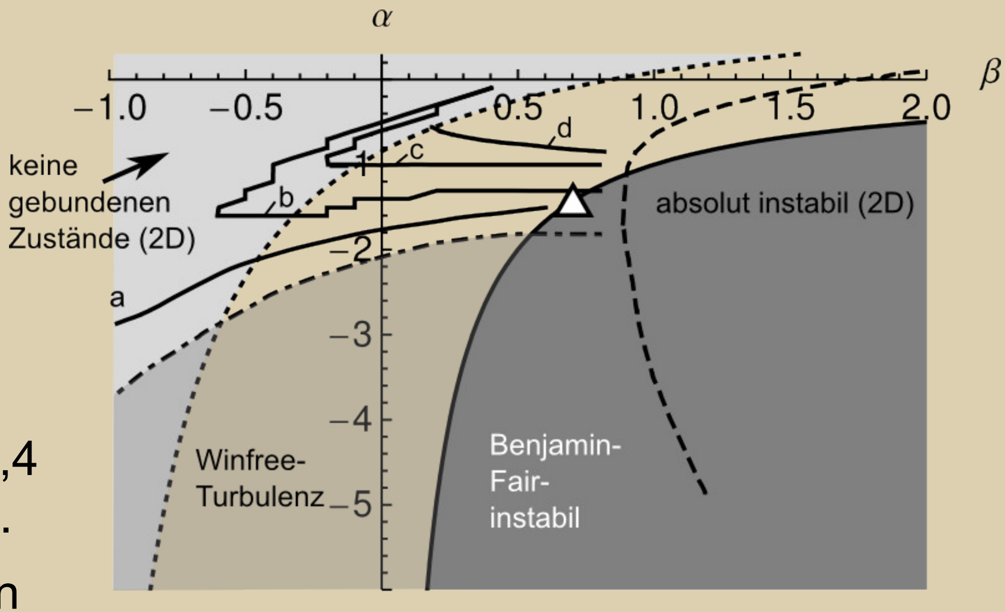
Parameter:

- α Querdiffusion
- β nichtlineare Oszillation

Methoden

- reduktive Störungstheorie (Amplitudengleichung)
- quenching-Experimente z.B. α=-1,4 β=0,7 für die BZR (Kramer, 1994).
- Messung der Filamentpsannung in Einheiten, die durch das System vorgegeben sind:

$$\frac{C k^2}{\omega - \omega_{hom}} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha - \beta}$$



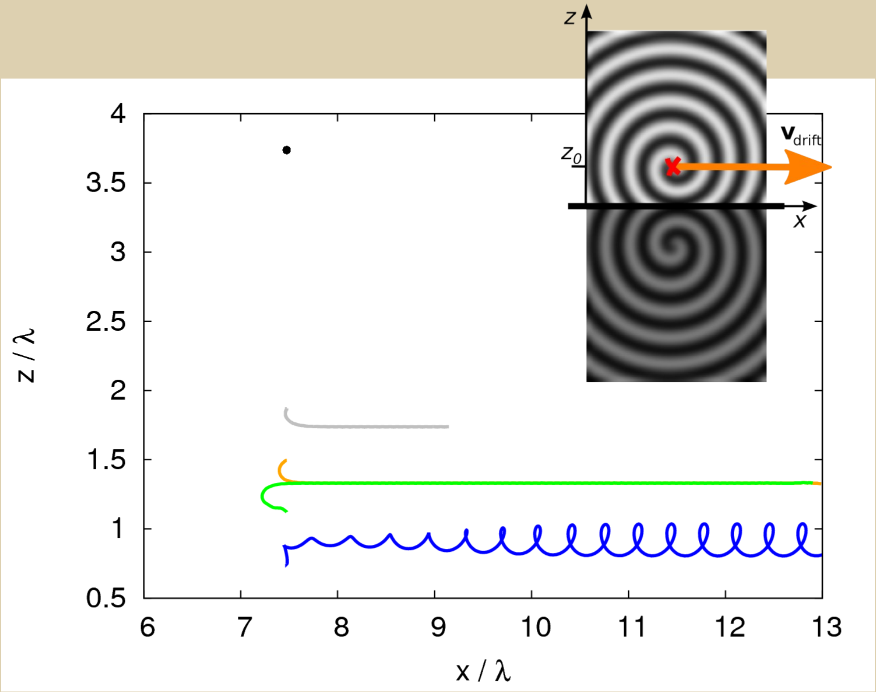
Kuramoto 1984; Aranson et al. 1992; Aranson, Kamer, Weber 1993; Aranson, Bishop, Kramer 1998; Nam et al. 1998; Rousseau, Chate, Kapral 2008

Erinnerung: Wechselwirkung eine Spiralwelle mit einem Neumann-Rand

- Folge von Attraktoren, die die Spiralwelle in einen festen Abstand z_{att} ziehen
- im Attraktor driftet die Spiralwelle parallel zum Rand
- die Driftgeschwindigkeit sinkt mit steigendem z_{att}
- der erste Fixpunkt von $v_Z(z)$ kann instabil sein → Meandern
- für $z \gg \lambda$, ist die WW sehr schwach, Beobachtung in der Numerik nicht möglich; starre Rotation der Spiralwelle

$$v_{\perp}(z) = -\exp(-a z)\sin(b z) z^c$$

$$v_{\|}(z) = \exp(-a z) z^c [D\cos(bz) + E\sin(bz)]$$

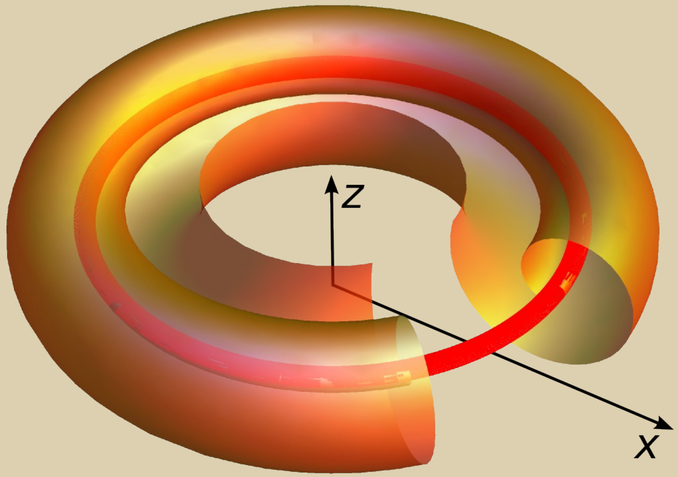


Wechselwirkung Scrollrings mit einem Neumann-Rand

Gabbay, Ott, Guzdar, 1998

$$\frac{d}{dt}R = -\frac{1+\alpha^2}{R}$$

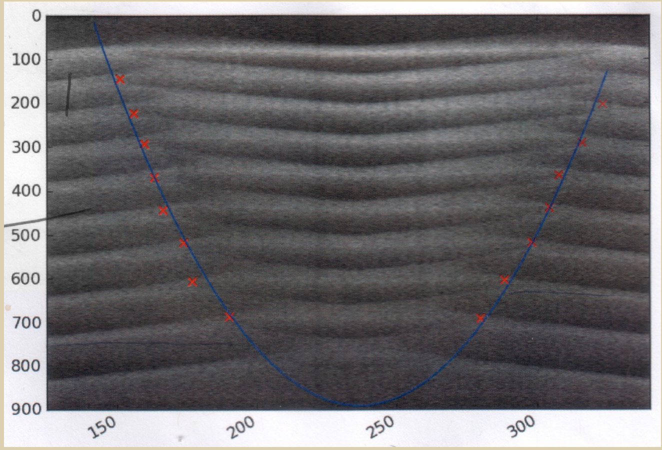
$$\frac{d}{dt}z = 0$$



Lösung

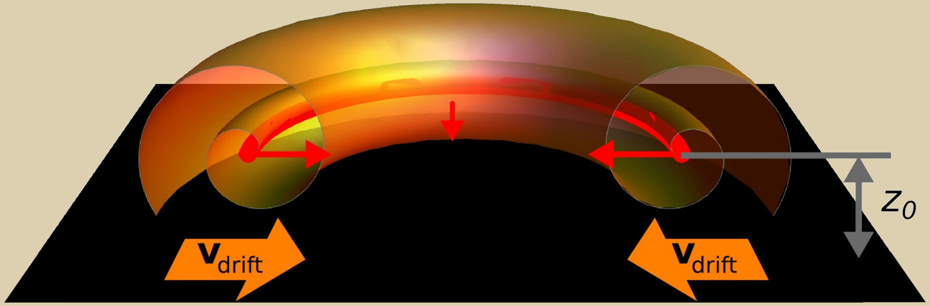
$$R(t) = \sqrt{R_0 - 2t(1+\alpha^2)}$$

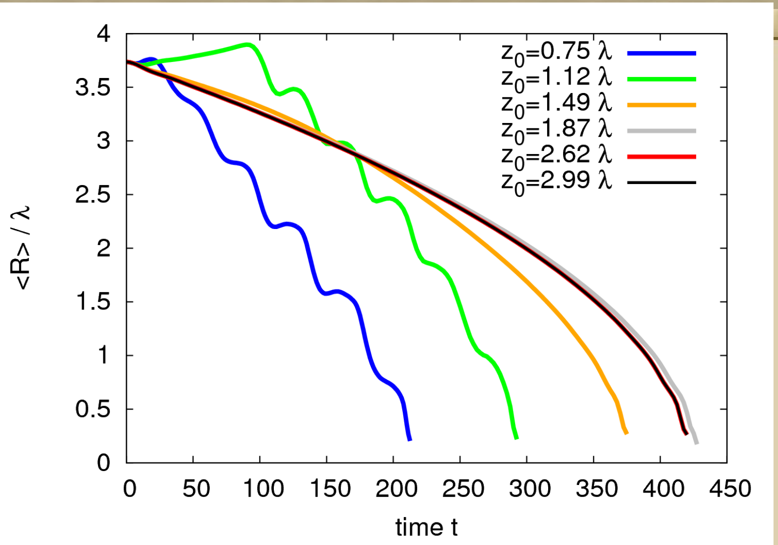
$$z(t) = z_0$$



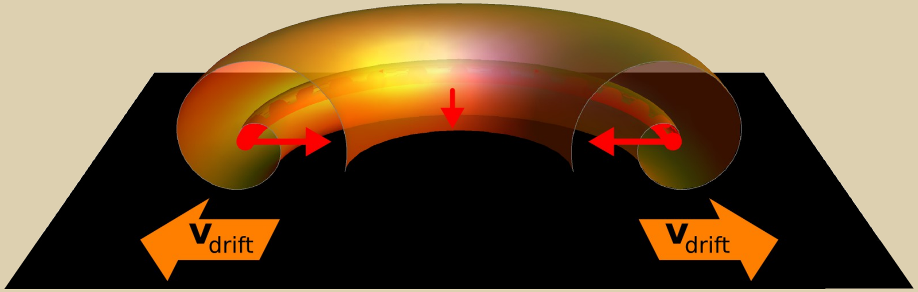
Charakterisierung der Dynamik

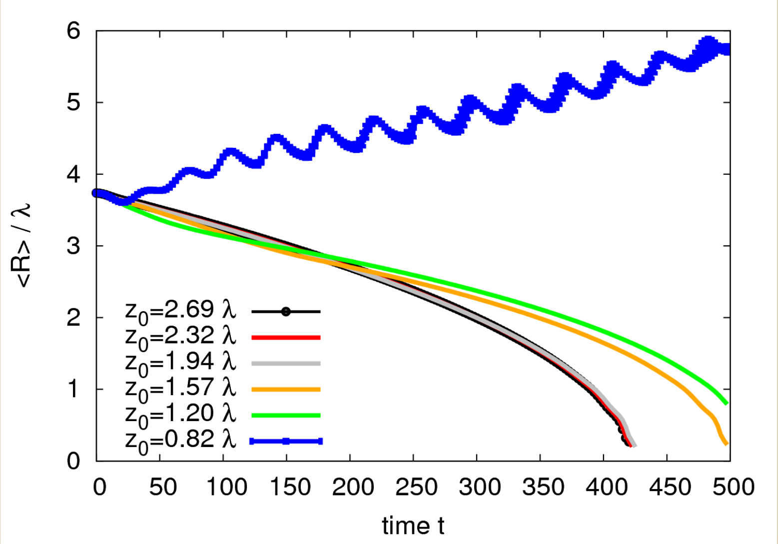
kooperative Anordnung





antagonistische Anordnung





phänomenologische Theorie

aus der Störungstheorie:

$$v_{\parallel}(t\to\infty)=v_{\parallel}(z) \qquad v_{\perp}(t\to\infty)=v_{\perp}(z)$$

Annahme: der Scrollring wird schnell in einen festen Abstand zum Rand gezogen

$$\frac{d}{dt}z=\frac{1}{\tau}(z-z_i^*)\ \text{mit}\ v_{\perp}(z_i^*)=0\Rightarrow v_{\parallel}(z_i^*)=const$$

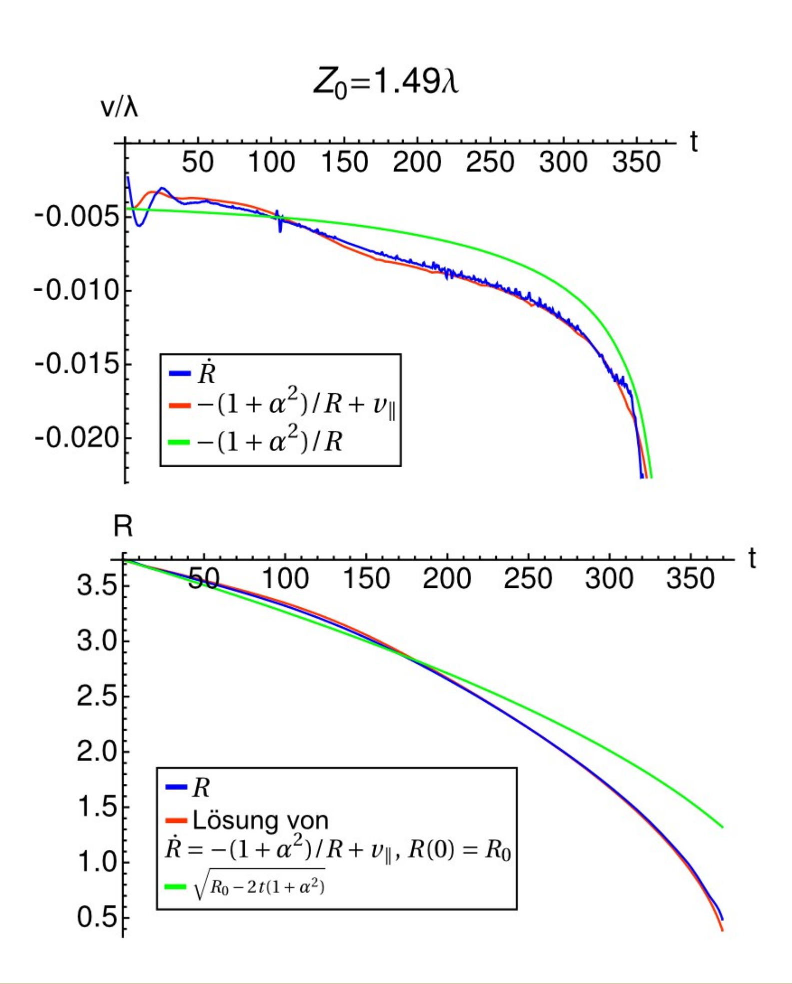
Dann kann die Kontraktionsrate korrigiert werden:

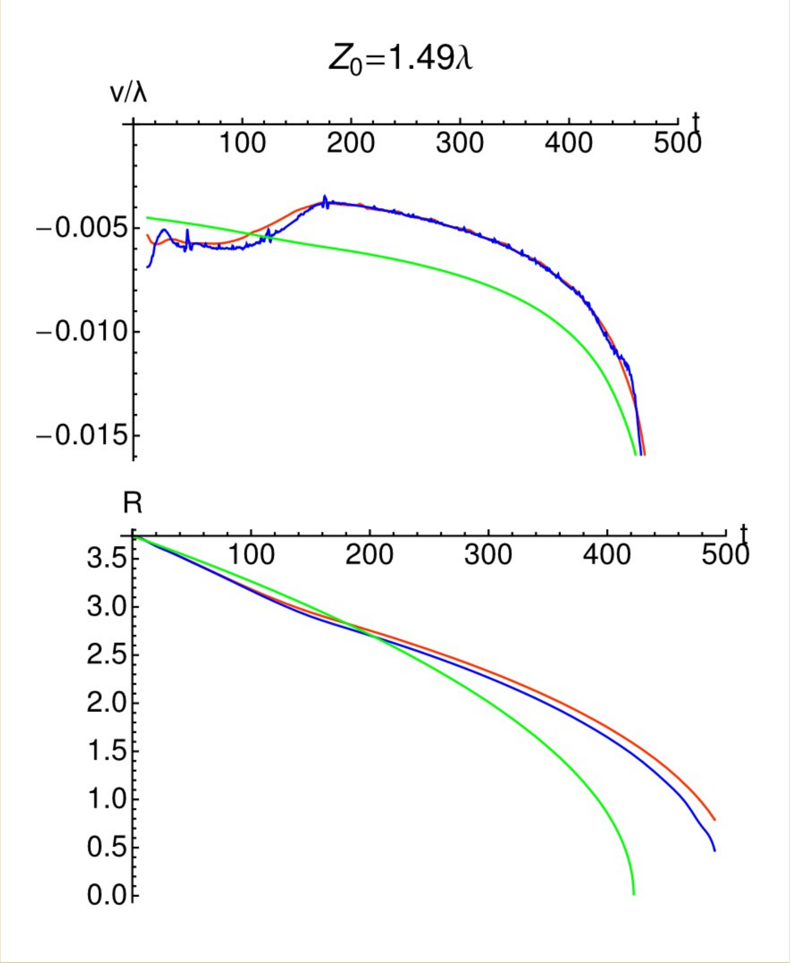
$$\frac{d}{dt}R=-\frac{1+\alpha^2}{R}+v_{\parallel}$$

Fixpunkt: $$R^*=\frac{1+\alpha^2}{v_{\parallel}}$$

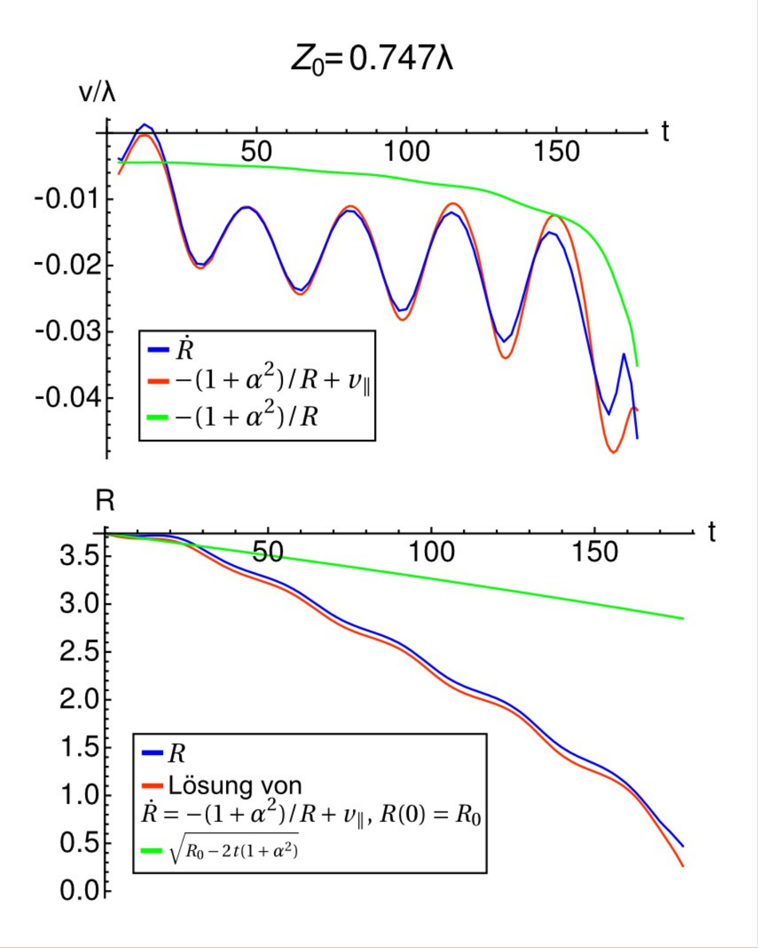
Stabilität $$J(R)|_{R=R^*}=\frac{1+\alpha^2}{R^{*2}}=\frac{v_{\parallel}^2}{1+\alpha^2}>0$$

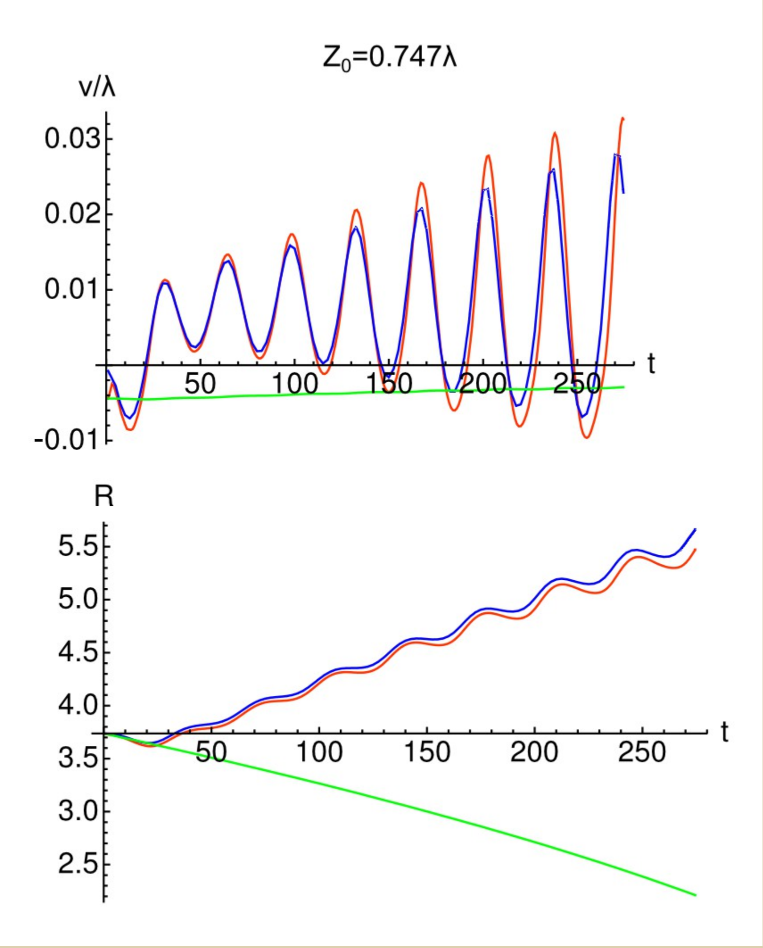
phänomenologische Theorie





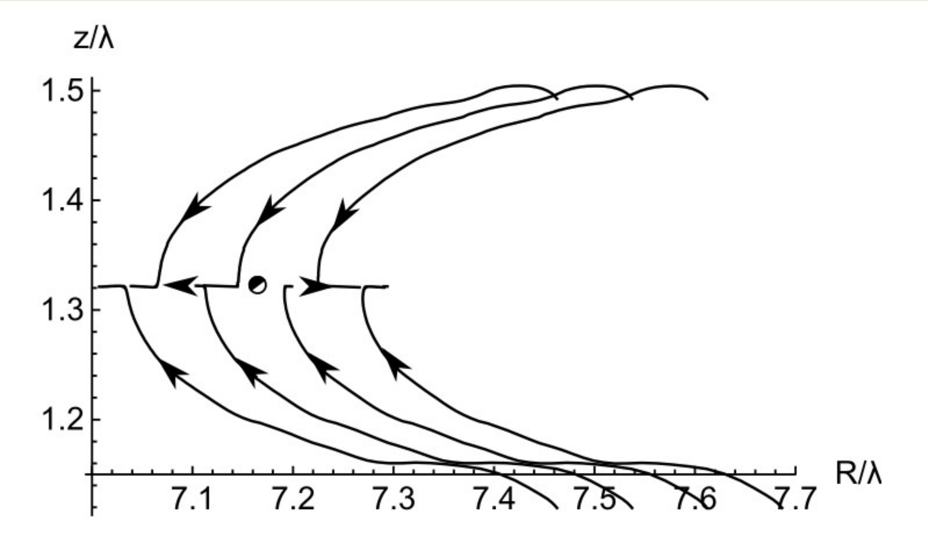
phänomenologische Theorie

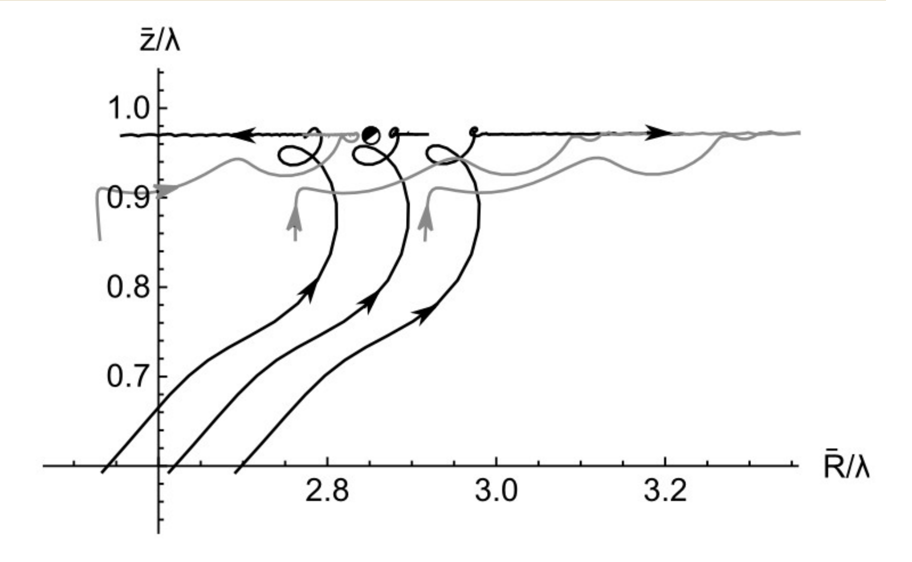




phänomenologische Theorie

Entwicklung eines Felds von Anfangsbedingungen in der (R,z)-Ebene





$$\overline{R}(t)=\frac{1}{20}\sum_{i=0}^{20} R(t+2i)$$

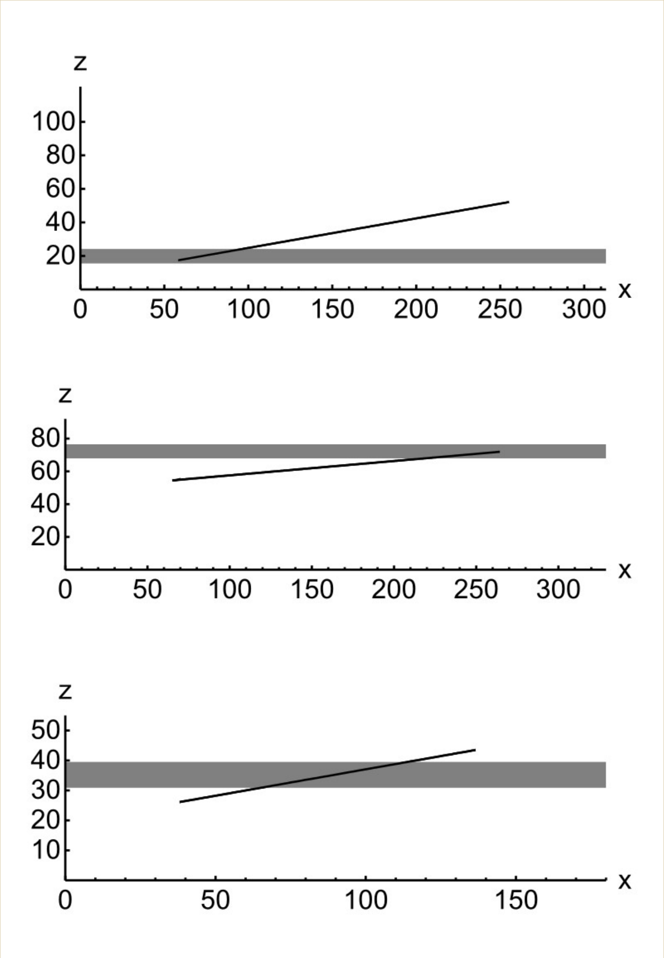
$\overline{z}(t)$ analog

geneigte Scrollringe

konstante Drift,
kooperative Anordnung:
Filament wird aus dem Attraktor vertrieben

konstante Drift,
antagonistische Anordnung:
Filament wird „festgehalten“

Drift und Meandern,
antagonistische Anordnung:
Filamentwellen und Verdehung der Phase



Zusammenfassung

- Die Wechselwirkung mit dem Neumann-Rand (wie sie für Spirawellen in der CGLE bekannt ist) führt zu einer Änderung der Drift und der Kontraktionsrate bei Scrollringen.
- Sie führt zu einem Sattelpunkt in der (R,z)-Ebene. Insbesondere ist Expansion möglich.
- Im Fall von konstanter Drift und auch Drift mit Meanderbewegung gilt eine phänomenologische Gleichung in der die intrinsische Dynamik und die Rand-induzierte Drift additiv eingehen.
- Bei verkippten Scrollringen wirkt ein meandernder Bereich als Quelle von Filamentwellen. Die Phase ist um das Filament gewunden.

Offene Fragen

- Annahme, dass der Parameterbereich, in dem es stabile Paare von Spiralwellen/ Scrollwellen gibt, im Dreidimensionalen und im Zweidimensionalen identisch ist: systematische Untersuchung nötig
- instabiler Fixpunkt in der kinematischen Beschreibung von Aranson, Kramer, Weber (1993) und Beobachtung von Meandern → Hopf-Bifurkation?
- Werte für die Parameter α und β aus dem Experiment

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur

- Kuramoto. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence (1984) Springer-Verlag
- Gabbay, Ott, and Guzdar (1998) The dynamics of scroll wave filaments in the complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D*, **118** (3-4), 371.
- Aranson, Kramer, and Weber (1993) Theory of interaction and bound states of spiral waves in oscillatory media. *Phys. Rev. E*, **47** (5), 3231.
- Kramer, Hynne, Sørenson, and Walgraef. (1994) The Ginzburg–Landau approach to oscillatory media. *Chaos* **4** (3), 443.
- Sepulchre and Babloyantz (1993) *Phys. Rev. E*, **48** (1), 187.