



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
BERLIN

---

# Licht-Materie Wechselwirkung in einem eindimensionalen Wellenleiter

Kohärente Feedbackkontrolle und quantisierte Pulse

Max Felix Tscherwinka

01.02.2022

---

# Inhaltsverzeichnis:

---

- Einleitung
- Methode
  - Operatoren und Zustände
  - Differentialgleichungen für Erwartungswerte
- Ergebnisse
  - Initial angeregtes System
  - Rechteck-Puls
  - Exponentiell abfallender Puls
- Fazit
- Literatur

# Einleitung:

---

- Quantencomputer sind revolutionäre technische Errungenschaften
- Wegen der besonderen Randbedingungen eignen sich Wellenleiter zur Realisierung von Quantencomputer auf Basis von Quantennetzwerken
- WQED wird genutzt, um den Erwartungswert eines Zwei-Niveau-Systems in eindimensionalen Wellenleiter analytisch zu berechnen

# Methode:

Zwei-Niveau-System:

$$\sigma_- = |g\rangle \langle e|, \quad \sigma_+ = |e\rangle \langle g|$$

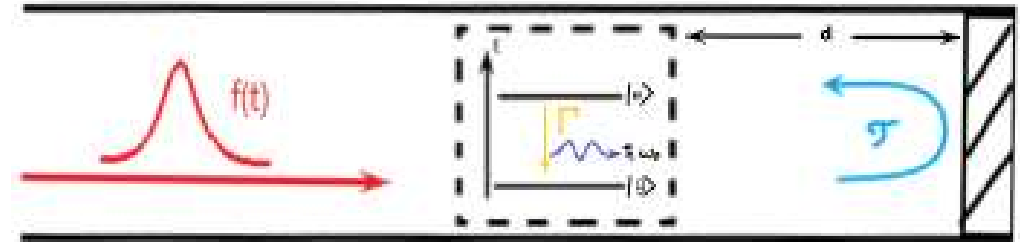
$$[\sigma_-, \sigma_+]_- = \mathbf{1} - 2\sigma_+\sigma_-$$

$$\sigma_+\sigma_- \equiv \hat{E}$$

Reservoir:

$$r_\omega, r_\omega^\dagger \quad \text{mit} \quad [r_{\omega'}, r_\omega^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$$

Skizze:



Hamiltonoperator  $H$ :

$$H = H_0 + H_{int}$$

$$H_0 = \hbar\omega_0\sigma_+\sigma_- + \hbar \int \omega r_\omega^\dagger r_\omega d\omega$$

$$H_{int} = \hbar \int g(\omega) \cdot (r_\omega^\dagger \sigma_- + r_\omega \sigma_+) d\omega$$

# Methode:

Hamiltonoperator  $H'$ :

$$H'(t) = U^\dagger(t, 0) H_{int} U(t, 0)$$

$$U(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_0 dt'}$$

$$H'(t) = \hbar \int g(\omega) \cdot (e^{i(\omega-\omega_0)t} r_\omega^\dagger \sigma_- + e^{-i(\omega-\omega_0)t} r_\omega \sigma_+) d\omega$$

Zustände  $|\Psi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = |j\rangle \otimes |n\rangle \equiv |j, n\rangle$$

$$|j, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_f^\dagger)^n |j, 0\rangle \quad a_f^\dagger = \int f(t) r_t^\dagger dt$$

# Methode:

---

Ohne Rückkopplung:  $g(\omega) = g_0$

Differentialgleichung des Besetzungszahloperators:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle j, n | \hat{E}(t) | j, n \rangle &= -2\Gamma_1 \langle j, n | \hat{E}(t) | j, n \rangle + i\sqrt{n2\Gamma_1} f^*(t) \langle j, n-1 | \sigma_-(t) | j, n \rangle \\ &\quad - i\sqrt{n2\Gamma_1} f(t) \langle j, n | \sigma_+(t) | j, n-1 \rangle \end{aligned}$$

Differentialgleichung des Absteigeoperators:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle j, n-1 | \sigma_-(t) | j, n \rangle &= -\Gamma_1 \langle j, n-1 | \sigma_-(t) | j, n \rangle \\ &\quad - i\sqrt{n2\Gamma_1} f(t) [1 - 2 \langle j, n-1 | \sigma_+(t) \sigma_-(t) | j, n-1 \rangle] \end{aligned}$$

# Methode:

Mit Rückkopplung:  $g(\omega) = g_0 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

Differentialgleichung des Besetzungszahloperators:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle j, n | \hat{E}(t) | j, n \rangle &= -2\Gamma_2 \langle j, n | \hat{E}(t) | j, n \rangle - \sqrt{n\Gamma_2} [f_\tau^*(t) \langle j, n-1 | \sigma_-(t) | j, n \rangle + f_\tau(t) \langle j, n | \sigma_+(t) | j, n-1 \rangle] \\ &\quad + \Gamma [e^{-i\omega_0\tau} \langle j, n | \sigma_+(t-\tau) \sigma_-(t) | j, n \rangle + e^{i\omega_0\tau} \langle j, n | \sigma_+(t) \sigma_-(t-\tau) | j, n \rangle] \Theta(t-\tau) \end{aligned}$$

Differentialgleichung des Absteigeoperators:

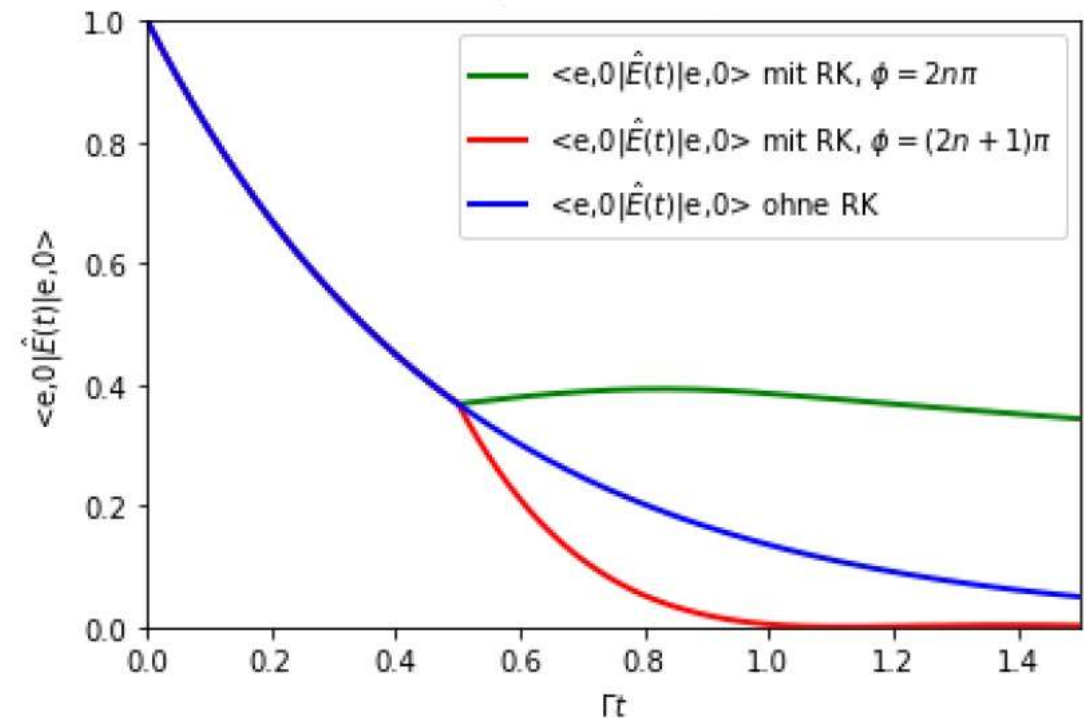
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle j, n-1 | \sigma_-(t) | j, n \rangle &= -\Gamma_2 \langle j, n-1 | \sigma_-(t) | j, n \rangle - \sqrt{n\Gamma_2} f_\tau(t) [1 - 2 \langle j, n-1 | \sigma_+(t) \sigma_-(t) | j, n-1 \rangle] \\ &\quad + \Gamma_2 e^{i\omega_0\tau} [\langle j, n-1 | \sigma_-(t-\tau) | j, n \rangle \\ &\quad - 2 \langle j, n-1 | \sigma_+(t) \sigma_-(t) \sigma_-(t-\tau) | j, n \rangle] \Theta(t-\tau) \end{aligned}$$

# Ergebnisse:

Initial angeregtes System:

$$\Gamma\tau = 0.5$$

Erwartungswert des initial angeregten  
Zwei-Niveau-Systems mit und ohne Rückkopplung





# Ergebnisse:

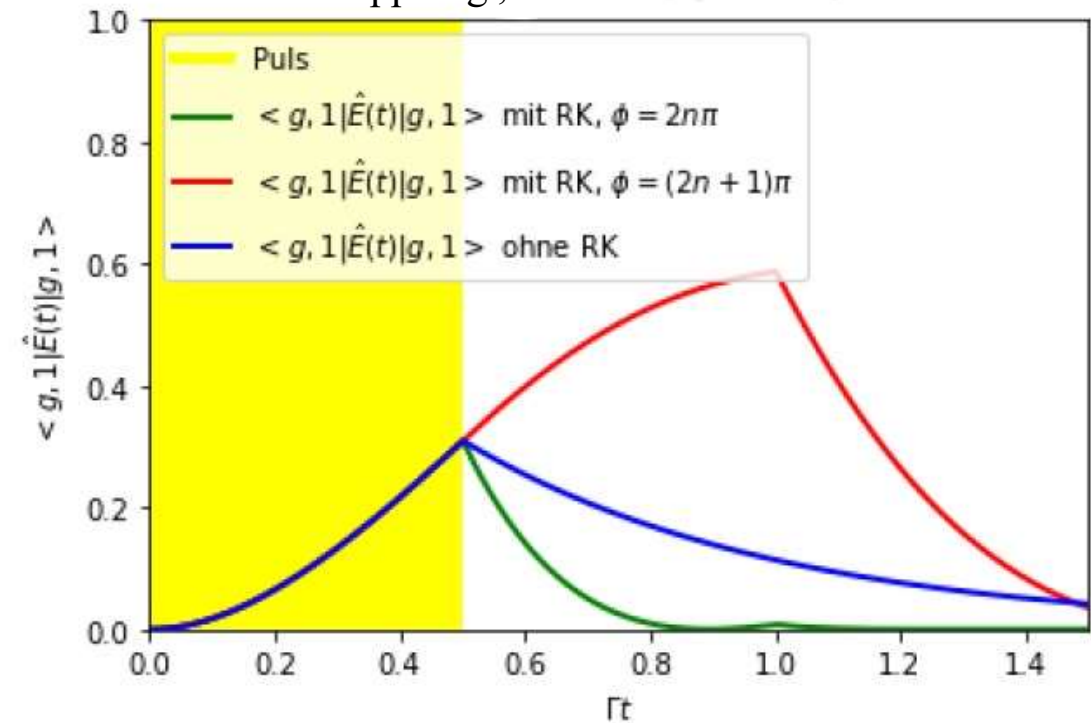
## Rechteck-Puls:

$$\Gamma\tau = 0.5,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \left[ \Theta(t - t_0) - \Theta(t - (t_0 + d)) \right]$$

mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t')|^2 dt' = 1$

Erwartungswert des Zwei-Niveau-Systems mit und ohne Rückkopplung, für den Rechteck-Puls



# Ergebnisse:

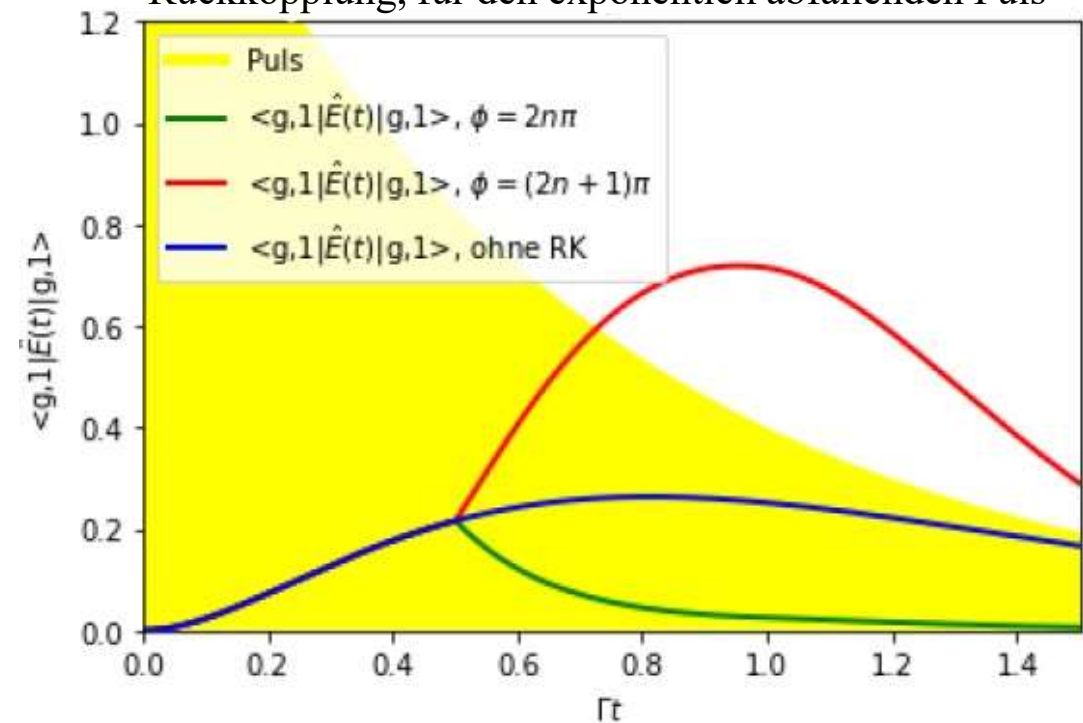
## Exponentiell abfallender Puls:

$$\Gamma\tau = 0.5$$

$$f(t) = \sqrt{2\Gamma_p} \cdot e^{\Gamma_p(t_0-t)} \cdot \Theta(t-t_0)$$

mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t')|^2 dt' = 1$

Vergleich der Erwartungswerte des  
Zwei-Niveau-Systems mit und ohne  
Rückkopplung, für den exponentiell abfallenden Puls



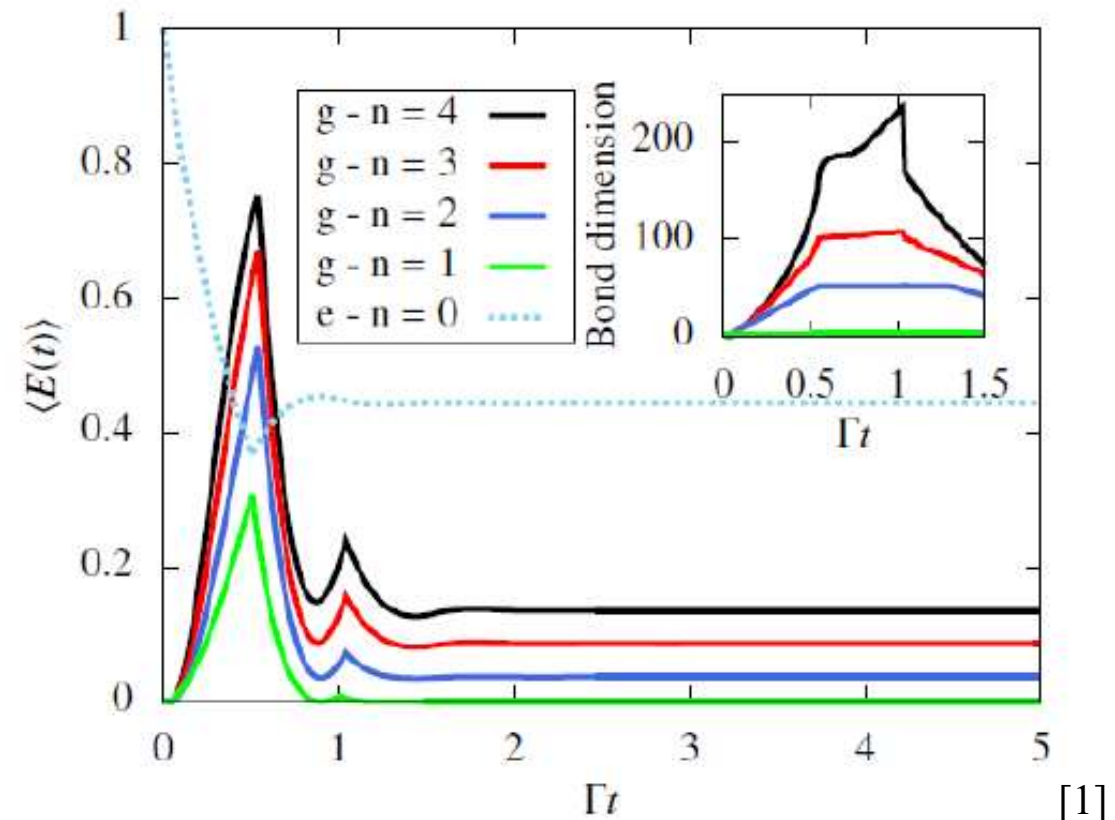
# Ergebnisse:



$$\begin{aligned}
 \langle g, 1 | \hat{E}(t) | g, 1 \rangle = & 2\Gamma_2 \Gamma_p \left[ \left( \frac{e^{-2\Gamma_p t} + e^{-2\Gamma_2 t} - 2e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)t}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \Theta(t) \right. \\
 & + \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - 2e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \Theta(t - \tau) \\
 & - 2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\frac{\tau}{2})} + e^{-2\Gamma_2(t-\frac{\tau}{2})} - e^{-\Gamma_p t - \Gamma_2(t-\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2 t}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \Theta(t - \tau) \\
 & + \Gamma_2^2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - 2e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^4} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-\tau)}) \cdot (t - \tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{-2\Gamma_2(t-\tau)}(t - \tau)^2}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \Theta(t - \tau) \\
 & + 2\Gamma_2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\frac{\tau}{2})} + e^{-2\Gamma_2(t-\frac{\tau}{2})} - e^{-\Gamma_p t - \Gamma_2(t-\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2 t}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{\tau}{2})} - e^{-\Gamma_p t - \Gamma_2(t-\tau)}) \cdot (t - \tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right. \\
 & \quad \left. \cdot \cos(\omega_0 \tau) \Theta(t - \tau) \right) \\
 & - 2\Gamma_2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - 2e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-\tau)}) \cdot (t - \tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \Theta(t - \tau) \\
 & + \Gamma_2^2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-2\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} - 2e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-2\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^4} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} - e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)}(t - 2\tau)^2}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \Theta(t - 2\tau) \\
 & - 2\Gamma_2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - e^{-\Gamma_p t - \Gamma_2(t-2\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-2\tau) - \Gamma_2 t}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\tau)} - e^{-\Gamma_p t - \Gamma_2(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right. \\
 & \quad \left. \cdot \cos(2\omega_0 \tau) \Theta(t - 2\tau) \right) \\
 & + 2\Gamma_2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\frac{3}{2}\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-2\tau) - \Gamma_2(t-\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \Theta(t - 2\tau) \\
 & - 2\Gamma_2^2 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-\frac{3}{2}\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-2\tau) - \Gamma_2(t-\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^4} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)}) \cdot (t - \tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \\
 & \quad \left. + \frac{e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)}(t - \tau) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \Theta(t - 2\tau) \\
 & + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-\tau) - \Gamma_2(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)} - e^{-\Gamma_p(t-2\tau) - \Gamma_2(t-\tau)}) \cdot (t - \tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} \\
 & \quad \left. + \frac{e^{-2\Gamma_2(t-\frac{3}{2}\tau)}(t - \tau) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \Theta(t - 2\tau) \\
 & - 2\Gamma_2^3 \left( \frac{e^{-2\Gamma_p(t-2\tau)} + e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} - 2e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-2\tau)}}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^5} + 2 \cdot \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} - e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^4} \right. \\
 & \quad + \frac{e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} \cdot (t - 2\tau)^2}{(\Gamma_2 - \Gamma_p)^3} + \frac{(e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} - e^{-(\Gamma_p + \Gamma_2)(t-2\tau)}) \cdot (t - 2\tau)^2}{2(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \\
 & \quad \left. + \frac{e^{-2\Gamma_2(t-2\tau)} \cdot (t - 2\tau)^3}{2(\Gamma_2 - \Gamma_p)^2} \right) \Theta(t - 2\tau) \Big].
 \end{aligned}$$

# Fazit:

- Erwartungswerte des Zwei-Niveau-Systems sind analytisch berechenbar
- Gebundene Zustände bilden sich lediglich beim initial angeregten Zwei-Niveau-System aus
- Gebundene Zustände bilden sich jedoch bei Anregungen durch zwei oder mehr Photonen aus



# Literatur:

---

[1] Kisa Barkemeyer, Andreas Knorr, Alexander Carmele: „*Strongly entangled system-reservoir dynamics with multi-photon pulses beyond the two-excitation limit: Exciting the atom-photon bound state*“, Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, D-10623 Berlin, Germany, 03.03.2021