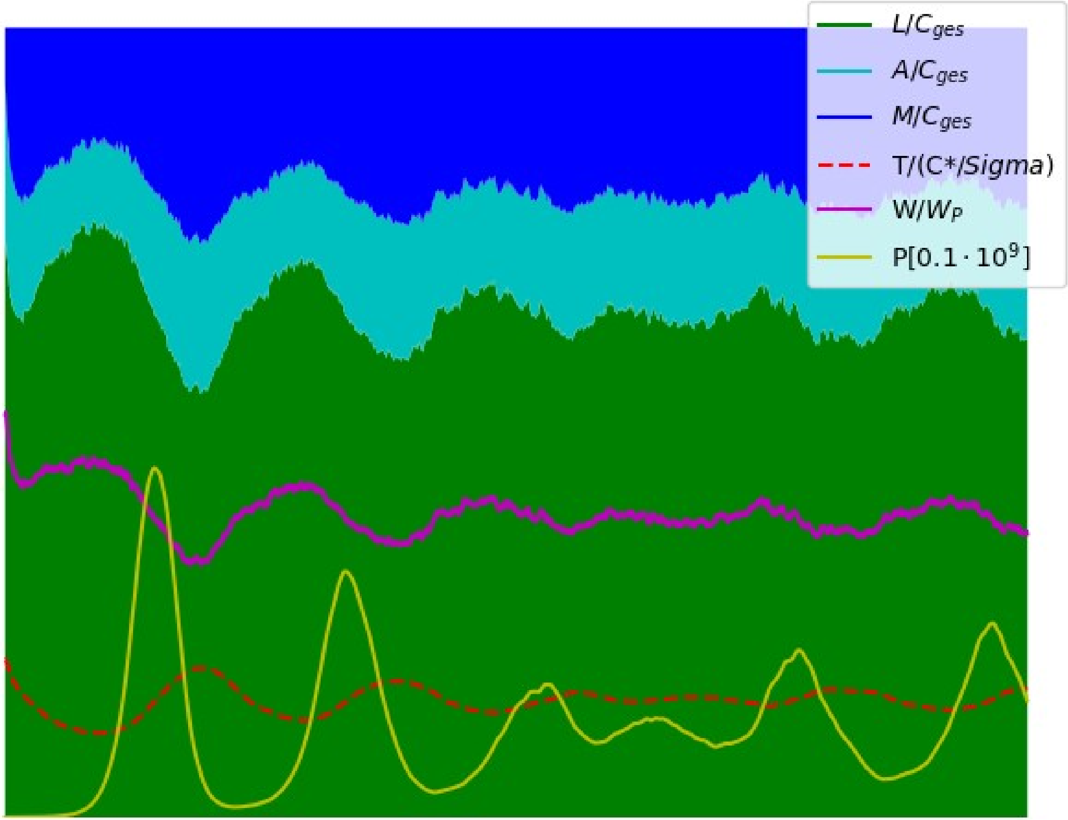
Einfluss von statischem Rauschen auf ein Welt-Erde Modell



Gliederung des Vortrags

1. kurzer Überblick über das Modell
    1. Variablen und Parameter
    2. Phasenraum und Trajektorien
2. Warum und wie wird Rauschen addiert
    1. mathematischer Einschub: stochastische Differentialgleichungen
    2. Einbindung ins Modell und Interpretationen
3. Ergebnisse
    1. Veränderungen der Trajektorien
    2. Einfluss auf die Kollapsrate des Systems
    3. Einfluss auf die Periodendauer

Überblick über das Modell

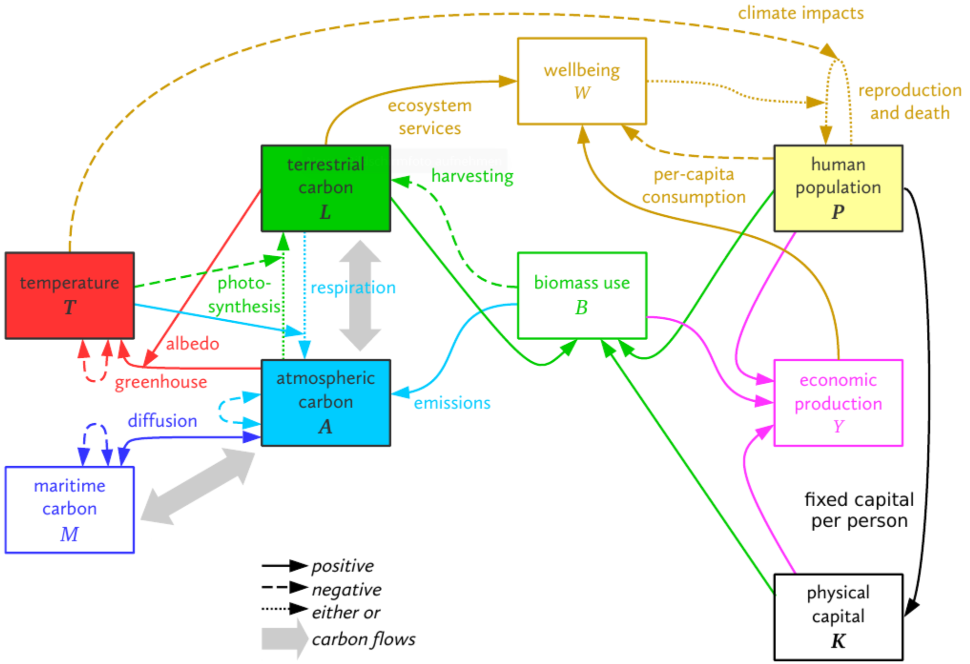


Bild entnommen aus 2.

- Modell wurde entwickelt von Jan Nitzbon in seiner Masterarbeit am PIK (2016)
- Niedrig-dimensionales Welt-Erde-Modell mit 4 freien Variablen (c:G:LAPT)
- Versucht eine vorindustrielle Gesellschaft zu beschreiben
- freie Variablen hängen über Flussdifferentialgleichungen zusammen
- Die anderen Variablen können daraus über algebraische Gleichungen berechnet werden

Gleichungen des Modells

c:G:LATP

$$\dot{L} = L\left((l_0 - l_T T)\sqrt{A/\Sigma} - (a_0 + a_T T)\right) - B \tag{3.50}$$

$$\dot{A} = -\dot{L} + \delta\,(M - mA) \tag{3.51}$$

$$\dot{T} = g\left(\frac{1}{\Sigma}A - T + \frac{\omega_L}{\Sigma}L - \Omega_0\right) \tag{3.52}$$

$$\dot{P} = P\left(\frac{2pWW_p}{W^2 + W_p^2} - \frac{q_0 + q_T T}{W} - \frac{q_P P}{\Sigma}\right) \tag{3.53}$$

where:

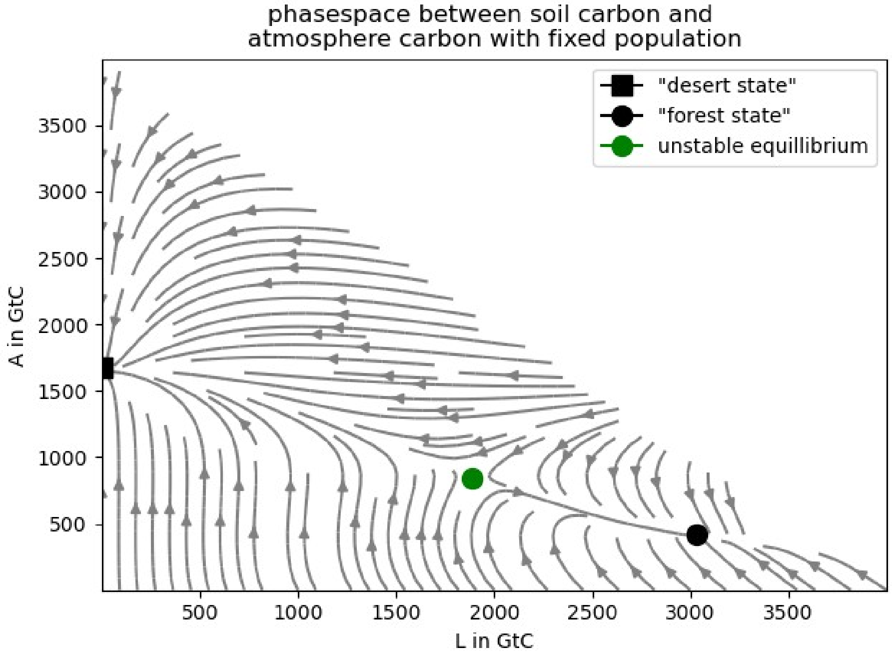
$$M = C^*_{\mathrm{PI}} - L - A \tag{3.54}$$

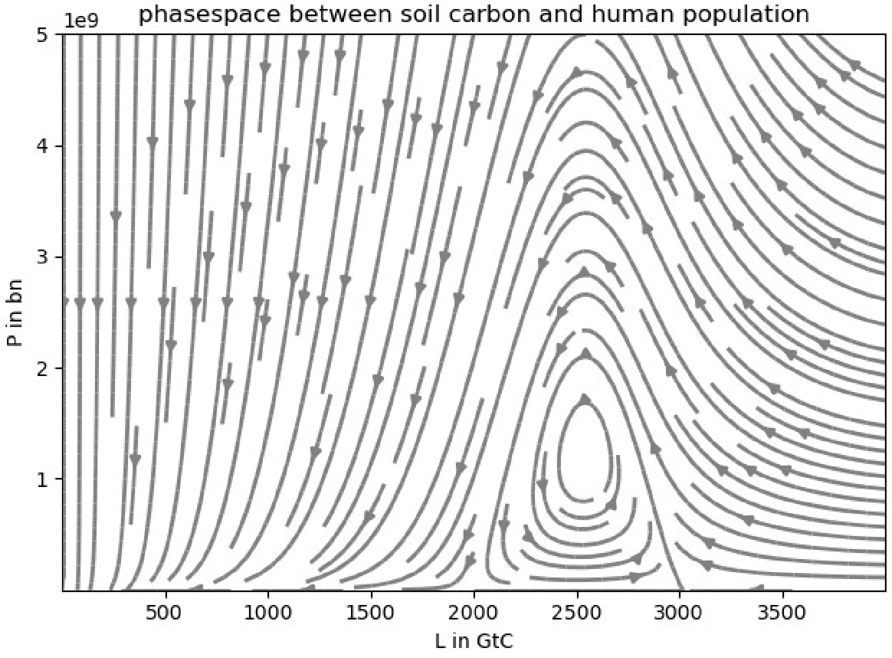
$$B = bL^{\frac{2}{5}}P^{\frac{3}{5}} \tag{3.55}$$

$$W = y_B\frac{B}{P} + \frac{w_L}{\Sigma}L \tag{3.56}$$

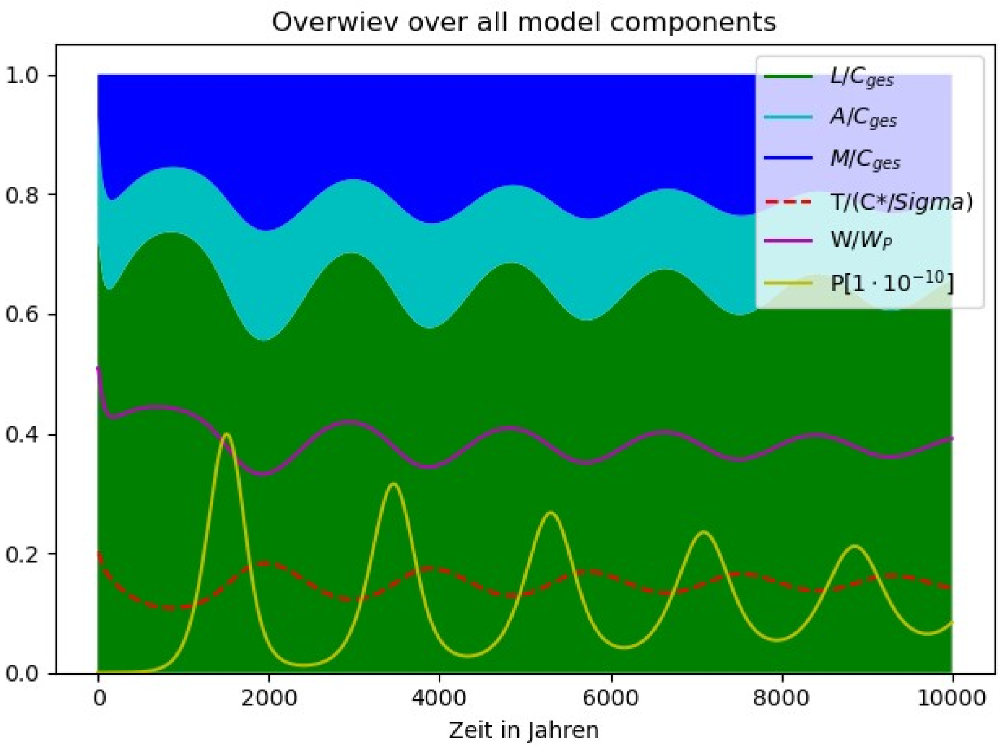
Bild entnommen aus 2.

Phasenraum des Systems



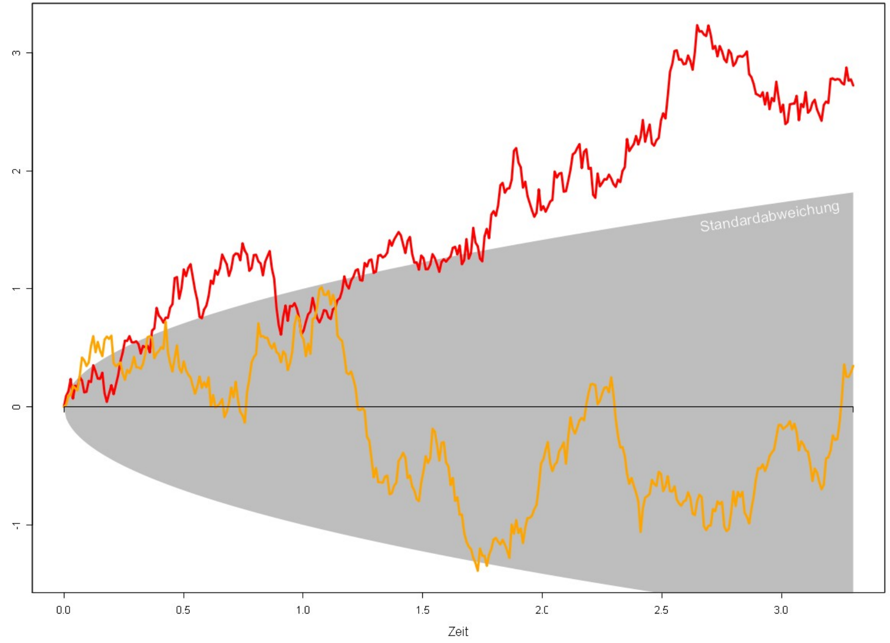


Trajektorien der Variablen



- Es wird immer ein Set von Parametern gewählt, die zu einem oziellierenden Verhalten des Modells führen
- Das System verlässt niemals einen “wünschenswerten” Zustand –> Leben wäre immer möglich

Stochastische Differentialgleichungen (in a nutshell)



$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_\tau, \tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t b(X_\tau, \tau)\,\mathrm{d}W_\tau$$

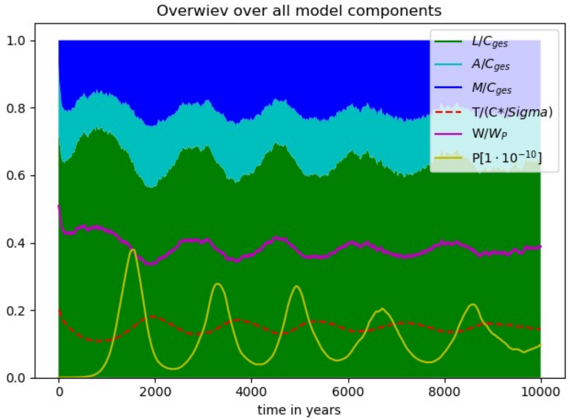
$$\mathrm{d}X_t = a(X_t, t)\,\mathrm{d}t + b(X_t, t)\,\mathrm{d}W_t$$

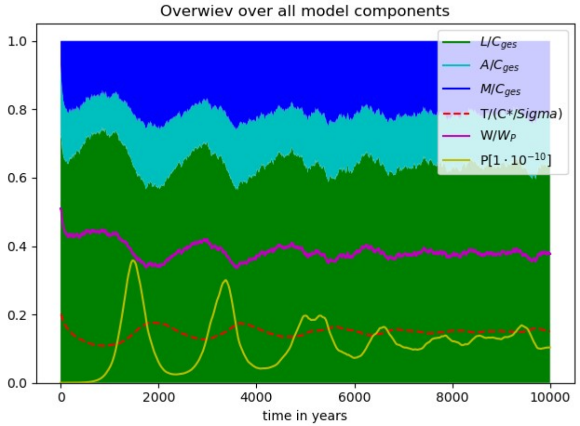
- Sonst immer: DGL –> Integralgleichung
- Jetzt: Integralgleichung kann auch DGL sein
- Es wird der Prozess gesucht, der die Integralgleichung erfüllt (Ito-Prozess)
- Meist nicht analytisch/geschlossen lösbar, sondern nur numerisch simulierbar (Euler-Maruyama-Schema)

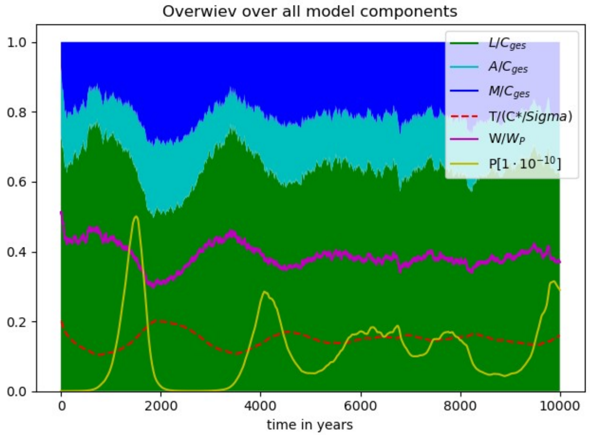
Rauschen

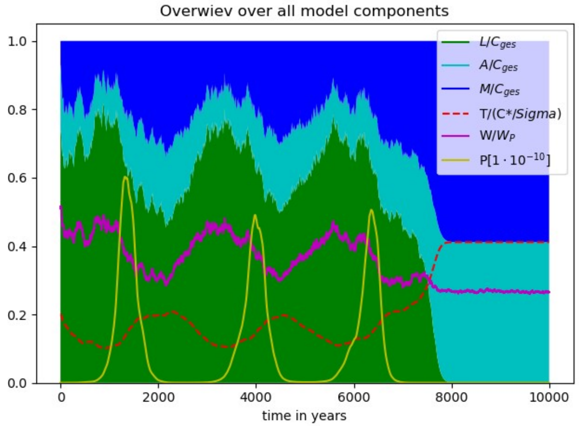
- wird genutzt um unvorhersehbare Ereignisse zu simulieren, die einen Einfluss die Kohlenstoffreservoire oder die menschliche Population der Erde haben (Waldbrände, Vulkanausbrüche, Krieg, Pandemien, etc.)
- Die Differentialgleichungen werden logarithmiert gelöst, das addierte Rauschen wirkt also multiplikativ auf die Variablen –> die Amplitude des Rauschens ist proportional zur Größe der Variablen
- Gleichungssystem wird gelöst mit sdeint, einer open-source Python-Bibliothek zur Lösung von stochastischen DGLs (https://pypi.org/project/sdeint/)
- Bisher wurde Rauschen immer auf L addiert, der Menge an Kohlenstoff in Pflanzen und Erde

Erste Ergebnisse

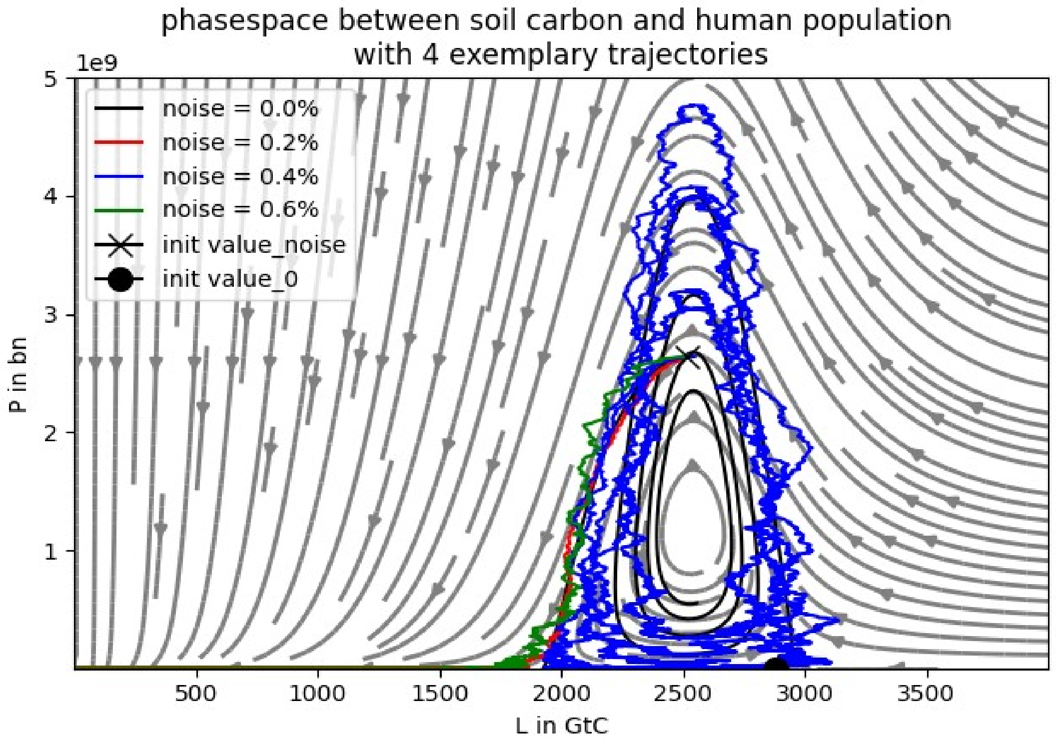






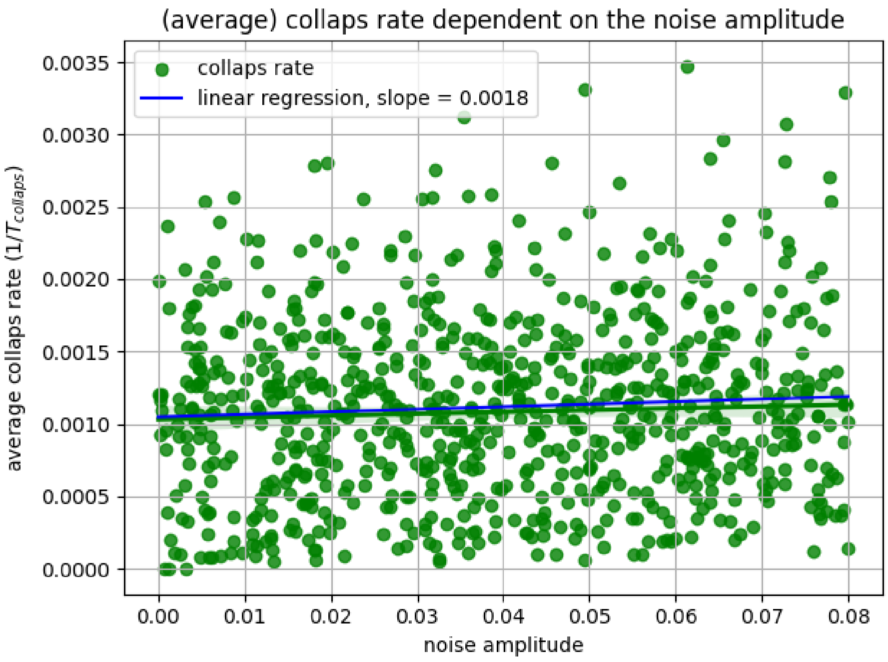


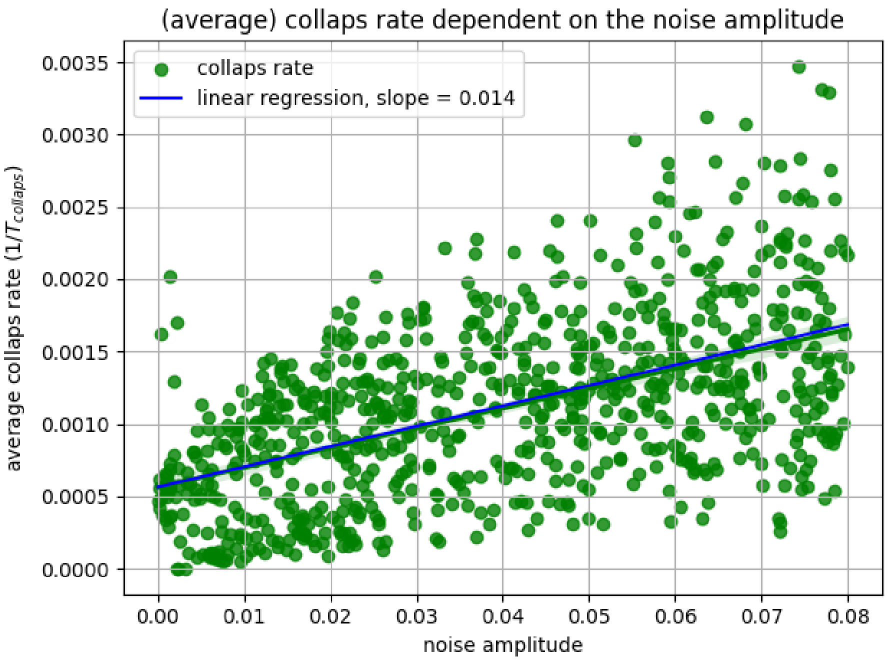
Erste Ergebnisse



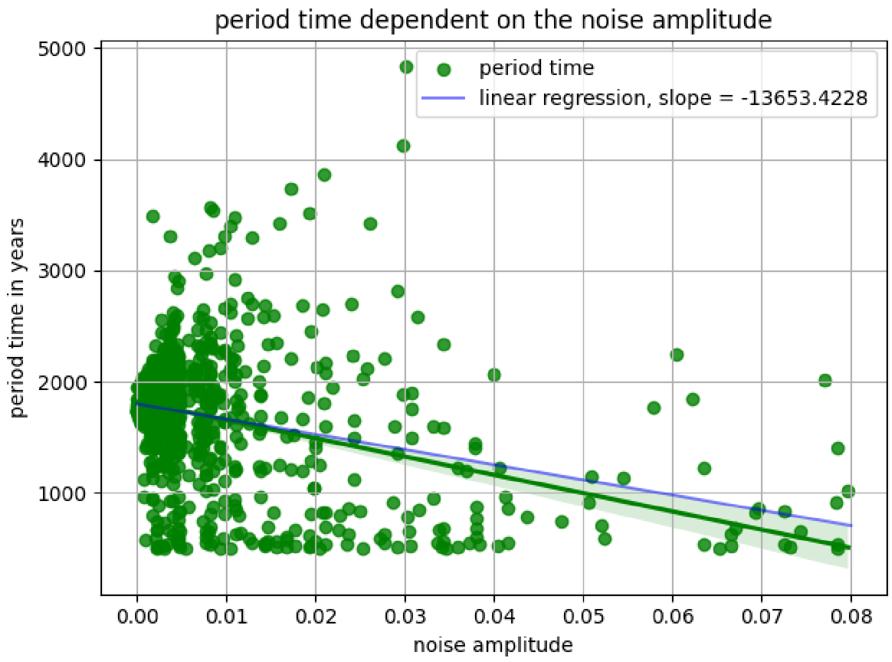
- In manchen Fällen kollabiert das System –> Wüstenzustand (rot, grün)
- In anderen Fällen bleibt das System in einem “wünschenswerten” Zustand, Leben bleibt möglich (blau)
- Weil das System dem stochastischen Rauschen ausgesetzt ist, kann keine Vorhersage über das konkrete Verhalten in einem bestimmten Fall gemacht werden –> statistische Untersuchung notwendig

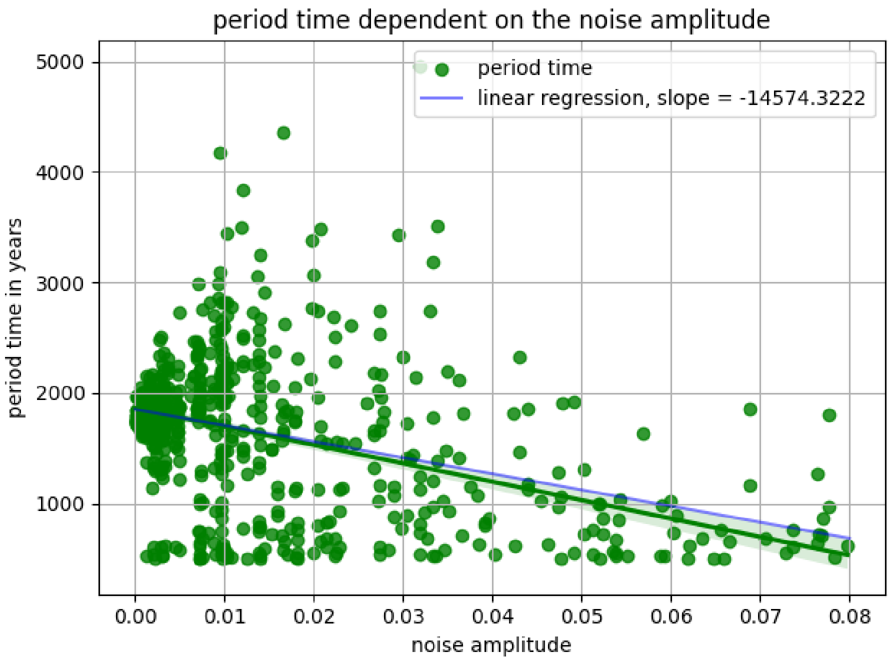
Kollapsrate des Systems



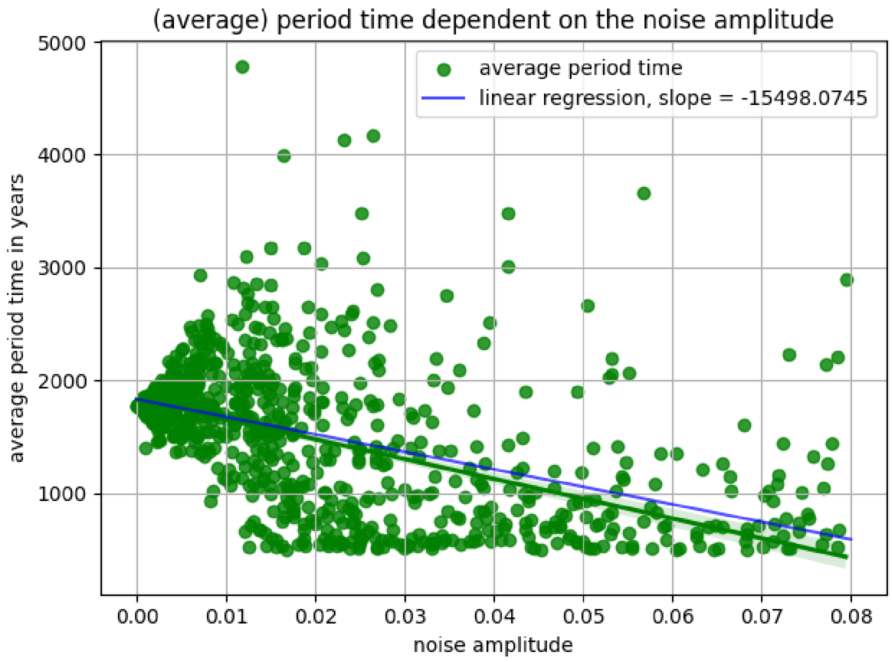


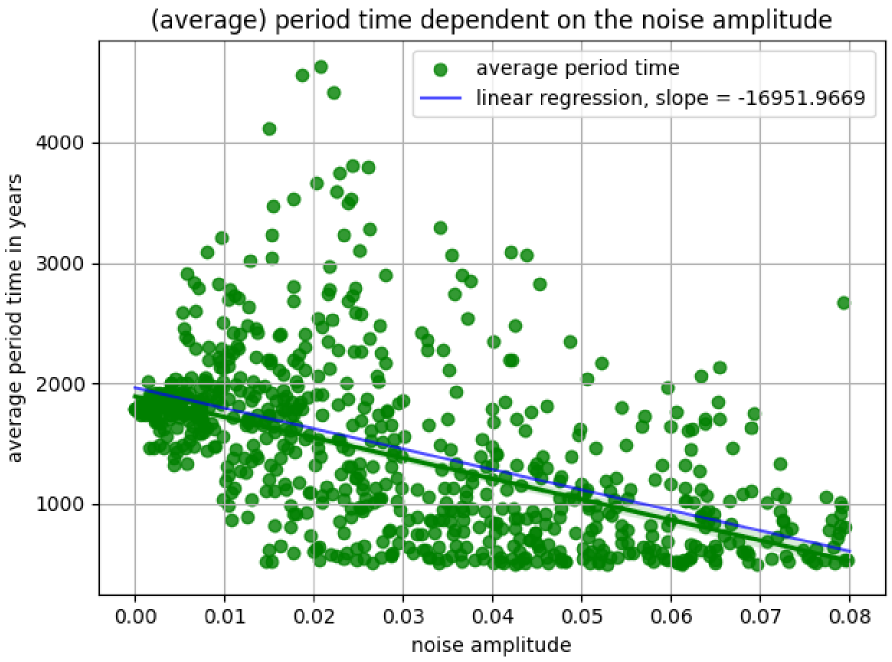
Periodendauer des Systems



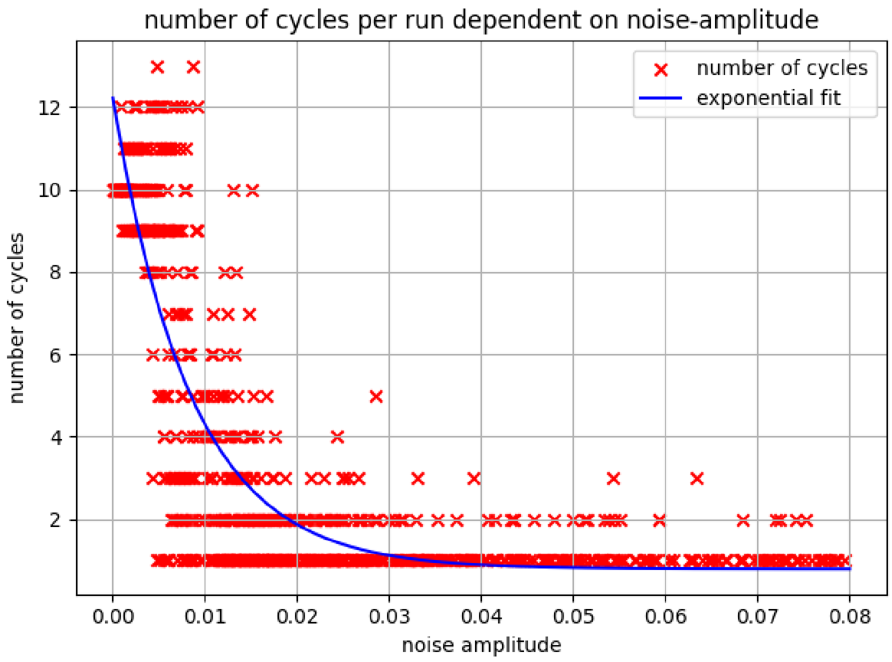


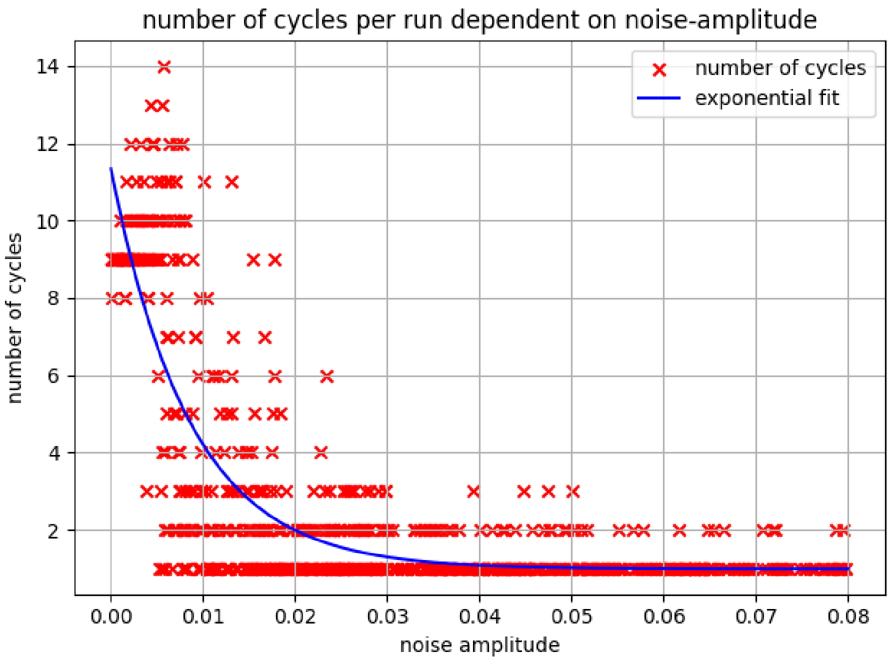
durchschnittliche Periodendauer des Systems





Anzahl an Umläufen





Ausblick/weitere Ideen

- Rauschen auch auf die Population P wirken lassen und den Effekt untersuchen –> gegen welche Störung ist das System widerstandsfähiger
- Rauschen auf verschiedene Variablen gleichzeitig wirken lassen
- Rauschen nicht konstant wirken lassen, sondern zu bestimmten Zeitpunkten ein Event mit großem Einfluss simulieren

Quellen:

1. Jan Nitzbon et al, 2017, Enviromental Research Letters 12 074020
2. Jan Nitzbon, Bifurcation analysis and parameter estimation in low-dimensional Models, 2016, Masterarbeit am PIK
3. Pypi – sdeint, https://pypi.org/project/sdeint/
4. Wikipedia.de, Wienerprozes https://de.wikipedia.org/wiki/Wienerprozess#/media/Datei:Wienerprozess.png